§2.3 Löwenheim-Skolem

Satz 2.15 (Löwenheim-Skolem): Seien $\mathfrak{B}$ eine L-Struktur, $S \subseteq B$ und κ eine unendliche Kardinalzahl.

1. Falls $\max(|S|, |L|) \leq \kappa \leq |B|$, dann hat $\mathfrak{B}$ eine elementare Unterstruktur der Kardinalität κ, die S enthält.
2. Falls $\mathfrak{B}$ unendlich ist und $\max(|B|, |L|) \leq \kappa$, dann hat $\mathfrak{B}$ eine elementare Erweiterung der Kardinalität κ.

Kor 2.16: Hat eine Theorie ein unendliches Modell, so hat sie ein Modell in jeder Kardinalität $\kappa \geq \max(|L|, \aleph_0)$.

Def 2.17 (vorläufig): Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Theorie T heißt $\underline{\kappa\text{-kategorisch}}$, falls alle Modelle von T von Kardinalität κ isomorph sind.

Satz 2.18 (Vaught's Test): Eine κ-kategorische Theorie ist vollständig, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. T ist konsistent.
2. T hat kein endliches Modell.
3. $|L| \leq \kappa$.

Def. 2.17 (aktualisiert): Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Theorie T heißt κ-kategorisch, falls T vollständig ist, $|T| \leq \kappa$ und alle Modelle von T von Kardinalität κ isomorph sind.