§2.3 Löwenheim-Skolem

Finde "beliebig" grosse/kleine Modelle für eine Theorie.

Satz 2.15 (Löwenheim-Skolem): Seien $\mathfrak{B}$ eine L-Struktur, $S \subseteq \mathcal{B}$ und $\varkappa$ eine unendliche Kardinalzahl.

1. Falls $\max(|S|, |L|) \leq \varkappa \leq |\mathfrak{B}|$, dann hat $\mathfrak{B}$ eine elementare Unterstruktur der Kardinalität $\varkappa$, die S enthält
2. Falls $\mathfrak{B}$ unendlich ist und $\max(|\mathfrak{B}|, |L|) \leq \varkappa$, dann hat $\mathfrak{B}$ eine elementare Erweiterung der Kardinalität $\varkappa$.

Bemerkung: Kor 1.14 $\quad |\langle S \rangle^{\mathcal{B}}| \leq \max\{|L|, |S|, \aleph_0\}$

Bew: 1. $S \subset S' \subset B \quad : \quad |S'| = \kappa$.

$\overset{\text{Kor 2.3}}{\Longrightarrow}$ es gibt eine elementare Unterstruktur $\mathcal{A}$: $|\mathcal{A}| \leq \max\{|S'|, |L|, \aleph_0\}$
$= |S'| = \kappa$,

$S' \subset \mathcal{A} \Rightarrow |\mathcal{A}| \geq |S'| = \kappa$.

2. Sei C eine Menge von Konstanten $|C| = \kappa$. $L' = L \cup B \cup C$

$$T' = \mathrm{Th}(\mathcal{B}_B) \cup \{\neg c \doteq d : c, d \in C \;\; c \neq d\}$$

$\uparrow$ $\{\varphi : \varphi$ ist $L(B)$-Aussage $: \mathcal{B} \models \varphi\}$

T' endlich erfüllbar, $\quad \Delta \subset T'$, $|\Delta| < \infty$,

$\mathcal{B} \models \Delta$, da $\mathcal{B}$ ist unendlich,

$\overset{\text{Kpk}}{\Longrightarrow} \exists \mathcal{A} \models T'$, $\quad \mathcal{A} \models \mathrm{Th}(\mathcal{B}_B)$

Lemma 2.12: Die Modelle von $\mathrm{Th}(\mathcal{B}_B)$ sind genau die Strukturen der Form $(\mathcal{A}, h(b))_{b \in B}$ wobei

$h : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ elementare Einbettung.

$\Rightarrow \mathcal{A}$ ist elementare Erweiterung von $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| \geq |\{c^{\mathcal{A}} : c \in C\}| = \kappa$

$\rightsquigarrow$ wenden 1 an $\Rightarrow \mathcal{A}' \succ \mathcal{B}$ mit $|\mathcal{A}'| = \kappa$. $\square$

Kor 2.16: Hat eine Theorie ein unendliches Modell, so hat sie ein Modell in jeder Kardinalität $\varkappa \geq \max(|L'|, \aleph_0)$.

Kor 2.16: Hat eine Theorie ein unendliches Modell, so hat sie ein Modell in jeder Kardinalität $\kappa \geq \max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$.

Def 2.17 (vorläufig): Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Theorie T heißt <u>κ-kategorisch</u>, falls alle Modelle von T von Kardinalität κ isomorph sind.

Satz 2.18 (Vaught's Test): Eine κ-kategorische Theorie ist vollständig, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. T ist konsistent.
2. T hat kein endliches Modell.
3. $|\mathcal{L}| \leq \kappa$.

<u>Bew:</u> Lemma 1.26: Wir wollen zeigen, dass alle Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von T elementar äquivalent sind.

$$\overset{2.}{\Rightarrow} |\mathcal{A}| = \infty,\ |\mathcal{B}| = \infty, \quad \xrightarrow[\text{Skolem},\ 3.]{\text{Löwenheim-}} \quad \begin{array}{l} \exists\ \mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}, \quad |\mathcal{A}'| = \kappa. \\ \exists\ \mathcal{B}' \equiv \mathcal{B}, \quad |\mathcal{B}'| = \kappa. \end{array}$$

$$\overset{\kappa\text{-kateg.}}{\Longrightarrow} \mathcal{A}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}' \Rightarrow \mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}' ! \Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}. \qquad \square$$

<u>Übung:</u> Sei T eine vollständige Theorie und $\mathcal{A} \models T$, $|\mathcal{A}| < \infty$.

Zeigen Sie: Jedes Modell von T hat Kardinalität $|\mathcal{A}|$.

<u>Beweis:</u> Sei $n := |\mathcal{A}|$

$$\varphi = \exists x_1 \dots x_n : \bigwedge_{i \neq j} \neg\, x_i \doteq x_j \wedge \forall x : \bigvee_{i=1}^{n} x \doteq x_i$$

$$\mathcal{A} \models \varphi \overset{\text{vollst.}}{\Longrightarrow} \text{Jedes Modell} \models \varphi.$$

Serie 2, Aufgabe 3 (b): $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, $|\mathcal{A}| < \infty \Rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ isomorph.

Def 2.17 (aktualisiert): Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Theorie T heißt <u>κ-kategorisch</u>, falls T vollständig ist, $|T| \leq \kappa$ und alle Modelle von T von Kardinalität κ isomorph sind.

T vollständig

$$|T| := \max\{|L|, \aleph_0\} = |\{L\text{-Formeln}\}|$$

<u>Bemerkung</u>: Def (alt) $\wedge$ $\left(\begin{array}{c}\text{Annahmen von} \\ \text{Vaughts test}\end{array}\right)$ $\Longrightarrow$ Def (neu).

<u>Bew</u>: Alle Modelle von T mit Kardinalität κ sind isomorph.

$\overset{\text{Vaught}}{\Longrightarrow}$ Vollständigkeit

$$|T| := \max\{|L|, \aleph_0\} \overset{3.}{\underset{|L| \leq \kappa}{\leq}} \max\{\kappa, \aleph_0\} = \kappa. \qquad \square$$

<u>Beispiel</u>: Dichte Ordnungen ohne Endpunkte, Dense linear orders DLO.

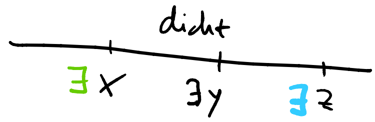
$L = L_{\text{Order}} = \{<\}$

– Orden

$$T_{DLO} = \left\{ \begin{array}{ll} \forall x & \neg(x<x) \\ \forall x y z & (x<y \wedge y<z \rightarrow x<z) \\ \forall x y & (x<y \vee x \doteq y \vee y<x) \\ \forall x z & (x<z \rightarrow \exists y\,(x<y \wedge y<z)) \\ \forall y \exists x: & x<y \\ \forall y \exists z: & y<z \end{array} \right\}$$

Vollständige Ordnung.

starke totale Ordnung.



$(\mathbb{Q},<) \models T_{DLO}$, $\quad \mathbb{N} \not\models T_{DLO}$

__Satz von Cantor:__ T_{DLO} ist $\aleph_0$-kategorisch.

__Bew:__ 1. T_{DLO} ist konsistent, $\mathbb{Q} \models T_{DLO}$

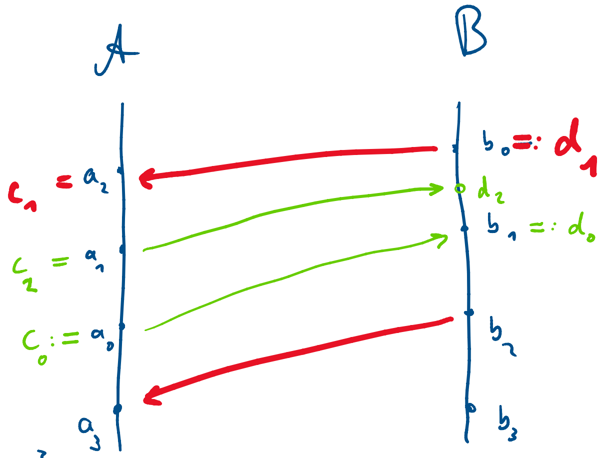
2. kein Endliches Modell.

3. $|L| = 1 < \aleph_0$.

Sei $\mathcal{A} \models T_{DLO}$, $\mathcal{B} \models T_{DLO}$, $|\mathcal{A}| = \aleph_0 = |\mathcal{B}|$.

$\rightsquigarrow \mathcal{A} = \{a_i : i \in \omega\}$, $\mathcal{B} = \{b_i : i \in \omega\}$. Back-and-Forth.

Definiere $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ wie folgt:
$c_i \longmapsto d_i$



D_{n-1}
$\shortparallel$

__Induktionsannahme__ $C_{n-1} := \{c_i : i<n\} \xrightarrow{\sim} \{d_i : i<n\}$

Wenn n gerade ist: $c_n := a_{i_n}$ sein

$i_n = \min\{i : a_i \in A \setminus C_{n-1}\}$

$\mathcal{B} \models T_{DLO}$: $\exists d_n$ so dass $i<n$: $\left.\begin{array}{l} d_n < d_i \iff c_n < c_i \\ d_n > d_i \iff c_n > d_i \end{array}\right\} \Rightarrow d_n \neq d_i$.

$\Rightarrow C_n = C_{n-1} \cup \{c_n\} \xrightarrow{\sim} D_n = D_{n-1} \cup \{d_n\}$.

Wenn n ungerade: wechsle Rolle von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Wenn n ungerade: wechsle Rolle von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

$$f: \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$$
$$c_i \longmapsto d_i$$

Back and Fort $\Rightarrow$ surjektivität.

injektivität. ✓

Ordnungserhaltend: $a, a' \in \mathcal{A}$, $\exists n: a, a' \in C_n$. $f(a), f(a') \in D_n$

$$a < a' \iff f(a) < f(a').$$ $\square$

T_{DLO} ist vollständig.

<u>Bem</u>: Für $\kappa = |\mathbb{R}|$, T_{DLO} ist <u>nicht</u> κ-kategorisch.

<u>Bew:</u> $\mathbb{R} \models T_{DLO}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\} \models T_{DLO}$

" Jede beschränkte Menge hat ein Supremum in $\mathbb{R}$. "

Falls $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ isom. Wir betrachten $\forall x \in (-\infty, 0): x < 1$

$\forall x \in f((-\infty, 0)): \quad x < f(1)$.

$\rightarrow \exists \; s := \sup f((-\infty, 0)) =$ kleinste obere Schranke.

$f^{-1}(s)$ ist kleinste obere Schranke für $(-\infty, 0)$. $\lightning$

$\Rightarrow T_{DLO}$ ist <u>nicht</u> $|\mathbb{R}|$-kategorisch. $\square$

<u>Beispiel 2</u>: $L = L_{Ring}$, T_{ACF_p} = Theorie der algebraisch abg. Körper der Charakteristik $p \in \{0, \text{primzahl}\}$.

$$T_{ACF_p} = T_{\text{Körper}} \cup \left\{ \forall x_0 \ldots x_{n-1} \; \exists y : \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot y^i \doteq \underline{0} \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$\cup \left\{ \forall x \; \underbrace{x + \ldots + x}_{p\text{-mal}} \doteq \underline{0} \right\}$$

oder
$$\cup \left\{ \neg \underbrace{\underline{1} + \ldots + \underline{1}}_{n\text{-mal}} \doteq \underline{0} \; : n \in \mathbb{N} \right\}$$

<u>Beh</u>: ACF_p ist κ-kategorisch für alle $\kappa > \aleph$ aber nicht $\aleph$-kat

Bem: ACF_p ist κ-kategorisch für alle $\kappa > \aleph_0$, aber nicht $\aleph_0$-kat.

Idee: $\overline{\mathbb{Q}}$ = algebraischer Abschluss, $\overline{\mathbb{Q}(\pi)}$,

$\overline{\mathbb{Q}} \models T_{ACF_0}$, $\overline{\mathbb{Q}(\pi)} \models T_{ACF_0}$, der Kardinalität $\aleph_0$.

$tr(\overline{\mathbb{Q}}) = 0$, $tr(\overline{\mathbb{Q}(\pi)}) = 1$.

Satz: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T_{ACF_p}$, Dann $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \iff tr(\mathcal{A}) = tr(\mathcal{B})$.

Falls $\kappa > \aleph_0$, dann gilt $|K| = tr_{\mathbb{Q}}(K)$.

Korollar: T_{ACF_p} ist vollständig. (Vaught's test).