§3 Quantorenelimination

Wenn nicht anders erwähnt ist L wieder eine beliebige Sprache.

§3.1 Formeln und Quantoren

Def 3.1:
- Atomare Formeln und ihre Negationen sind <u>Basis-Formeln</u>.

Jede quantorenfreie Formel ist eine Boolsche Kombination von Basis-Formeln, d.h. sie können aus Basis-Formeln durch iteratives Anwenden von $\neg$ oder $\wedge$ erzeugt werden.

Konvention: Wir schreiben iterierte Konjunktion oder Disjunktion von Formeln π_i als $\bigwedge_{i<n} \pi_i$ oder $\bigvee_{i<n} \pi_i$.

Wir setzen

$$\bigwedge_{i<0} \pi_i = \top \quad \text{„wahre Formel"} \quad \text{und}$$

$$\bigvee_{i<0} \pi_i = \bot \quad \text{„falsche Formel"}$$

Def. 3.2: Eine Formel ist in Negations-Normalform falls sie aus Basis-Formeln durch Anwenden von $\wedge, \vee, \exists, \forall$ entsteht.

Lem. 3.3: Jede Formel ist äquivalent zu einer Formel in Negations-Normalform

Def. 3.4: Eine Formel in Negations-Normalform heißt existenzielle Formel (oder Existenzformel), falls sie keine Allquantoren enthält. Sie heißt universell (oder Allformel), wenn sie keine Existenzquantoren enthält.

Lem 3.5: Sei $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Einbettung. Dann gilt für alle existenziellen Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ and $a_1, \dots, a_n \in A$:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)]$$

Für alle universellen $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ gilt:

$$\mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n].$$

§3.2 Erhaltungssätze

Def. 3.6: Seien T_1 und T_2 L-Theorien und φ eine L-Aussage. Wir sagen φ trennt T_1 von T_2, falls $T_1 \vdash \varphi$ und $T_2 \vdash \neg\varphi$.

Lem. 3.7: Seien T_1 und T_2 Theorien und $\mathcal{H}$ eine Menge von Aussagen, die abgeschlossen unter $\wedge$ und $\vee$ ist und die $\top$ und $\bot$ enthält. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt eine Aussage $\varphi \in \mathcal{H}$, die T_1 von T_2 trennt.
2. Alle Modelle $\mathcal{A}_1$ von T_1 können von allen Modellen $\mathcal{A}_2$ von T_2 durch eine Aussage $\varphi \in \mathcal{H}$ getrennt werden, d.h. $\mathcal{A}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{A}_2 \models \neg\varphi$.

Def 3.8: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen und $f: A \to B$ eine Abbildung, die alle Formeln aus einer Menge Δ enthält, dann schreiben wir $f: \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B}$.
Wir schreiben $\mathfrak{A} \Rightarrow_\Delta \mathfrak{B}$, falls alle Aussagen aus Δ, welche in $\mathfrak{A}$ wahr sind, auch in $\mathfrak{B}$ wahr sind.

Lem 3.9: Seien T eine L-Theorie, $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und Δ eine Menge von L-Formeln, welche abgeschlossen unter Existenz-Quantoren, Konjunktion und Variablen-Umbenennung ist. Dann sind äquivalent:

1. Alle Aussagen $\varphi \in \Delta$, welche in $\mathfrak{A}$ gelten sind konsistent mit T.
2. Es gibt ein Modell $\mathfrak{B} \models T$ und eine Abbildung $f: \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B}$.

Kor 3.10: $\mathfrak{A} \Rightarrow_\Delta \mathfrak{B}$ gilt genau dann wenn es eine Abbildung f und eine Struktur $\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$ gibt, sodass $f: \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B}'$.

Satz 3.11: Seien T_1 und T_2 Theorien. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Es gibt eine universelle Aussage, die T_1 von T_2 trennt.
2. Kein Modell von T_2 ist Unterstruktur eines Modells von T_1.

Def 3.12: Sei T eine L-Theorie.

- Zwei L-Formeln $\varphi(\bar{x})$ und $\psi(\bar{x})$ sind <u>äquivalent modulo T</u> (oder <u>relativ zu T</u>), falls

$$T \vdash \forall \bar{x} \, (\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

- Eine Theorie heißt <u>universell</u>, falls sie nur aus universellen Aussagen besteht.

Kor. 3.13: Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie.

1. Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Dann sind äquivalent:
   a) $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ist modulo T äquivalent zu einer universellen Aussage.
   b) Sind $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ Modelle von T und $a_1, \dots, a_n \in A$, dann gilt:
   $\mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ impliziert $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.
2. T ist äquivalent zu einer universellen Theorie gdw alle Unterstrukturen von Modellen von T wieder Modelle von T sind.