§ 3 Quantorenelimination

Wenn nicht anders erwähnt ist L wieder eine beliebige Sprache.

§ 3.1 Formeln und Quantoren

Def 3.1:

- Atomare Formeln und ihre Negationen sind <u>Basis-Formeln</u>.

Jede quantorenfreie Formel ist eine Boolsche Kombination von Basis-Formeln, d.h. sie können aus Basis-Formeln durch iteratives Anwenden von $\neg$ oder $\wedge$ erzeugt werden.

Bsp.: L_{Ring}

Basis in 1 Variablen:

Polynomgleichungen: $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \doteq \underline{0}$, $a_i \in \mathbb{Z}$

Polynomielle Ungleichung: $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \neq 0$, $a_i \in \mathbb{Z}$

Konvention: Wir schreiben iterierte Konjunktion oder Disjunktion von Formeln π_i als $\bigwedge_{i<n} \pi_i$ oder $\bigvee_{i<n} \pi_i$.

Wir setzen

$\bigwedge_{i<0} \pi_i = \top$ „wahre Formel" und

$\bigvee_{i<0} \pi_i = \perp$ „falsche Formel"

Def. 3.2: Eine Formel ist in <u>Negations-Normalform</u> falls sie aus Basis-Formeln durch Anwenden von $\wedge, \vee, \exists, \forall$ entsteht.

Bsp.: φ, ψ Basis: $\neg(\varphi \wedge \psi)$ nicht in NNF , $\neg \exists x\, \varphi(x)$ nicht in NNF

aber $\sim \neg\varphi \wedge \neg\psi$ " " $\sim \forall x\, \neg\varphi(x)$ in NNF

Lem. 3.3: Jede Formel ist äquivalent zu einer Formel in Negations-Normalform

Bsp.: L_{ring} $\varphi(x)$ Quantoren-frei in NNF:

$$\varphi(x) \sim \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \doteq 0 \wedge \dots \wedge \sum_{i=0}^{n'} b_i x^i \doteq 0 \wedge$$

$$\sum c_i x^i \neq 0 \wedge \dots \wedge \sum d_i x^i \neq 0$$

Def. 3.4: Eine Formel in Negations-Normalform heißt <u>existenzielle</u> Formel (oder <u>Existenzformel</u>), falls sie keine Allquantoren enthält. Sie heißt <u>universell</u> (oder <u>Allformel</u>), wenn sie keine Existenzquantoren enthält.

Bem.: ψ Allformel $\Leftrightarrow \psi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n\, \varphi(x_1, \dots, x_n)$ Quantoren-frei

ψ Existenzformel $\Leftrightarrow \psi = \exists x_1 \dots \exists x_n\, \varphi(x_1, \dots, x_n)$

Lem 3.5: Sei $h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Einbettung. Dann gilt für alle existenziellen Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und $a_1, \dots, a_n \in A$:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)]$$

Für alle universellen $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ gilt:

$$\mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n].$$

§ 3.2 Erhaltungssätze

Def. 3.6: Seien T_1 und T_2 L-Theorien und φ eine L-Aussage. Wir sagen φ trennt T_1 von T_2, falls $T_1 \vdash \varphi$ und $T_2 \vdash \neg\varphi$.

Lem. 3.7: Seien T_1 und T_2 Theorien und $\mathcal{H}$ eine Menge von Aussagen, die abgeschlossen unter $\wedge$ und $\vee$ ist und die $\top$ und $\bot$ enthält. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt eine Aussage $\varphi \in \mathcal{H}$, die T_1 von T_2 trennt.
2. Alle Modelle $\mathcal{A}_1$ von T_1 können von allen Modellen $\mathcal{A}_2$ von T_2 durch eine Aussage $\varphi \in \mathcal{H}$ getrennt werden, d.h. $\mathcal{A}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{A}_2 \models \neg\varphi$.

1. Syntaktisch
2. Semantisch

Bsp.:
- $\mathcal{H} = \{$existentielle L-Aussagen$\}$
- $\mathcal{H} = \{$universelle " $\}$
- $\mathcal{H} = \{$Q.-f. " $\}$

Bew.:

„1. ⇒ 2." Trennt φ T_1 von T_2, dann trennt φ auch alle Modelle von T_1 von allen Modellen von T_2.

„2. ⇒ 1." Für ein Modell $\mathcal{A}_1$ von T_1 sei $\mathcal{H}_{\mathcal{A}_1}$ die Menge aller Aussagen aus $\mathcal{H}$, die in $\mathcal{A}_1$ gelten.
Aus 2. folgt, dass $\mathcal{H}_{\mathcal{A}_1}$ und T_2 kein gemeinsames Modell haben.

Kpt'heit $\Rightarrow$ Gibt endliche Konjunktion $\varphi_{\mathcal{A}_1}$ von Aussagen aus $\mathcal{H}_{\mathcal{A}_1}$, s.d. $\varphi_{\mathcal{A}_1}$ inkonsistent mit T_2 ist. (d.h. $\underline{T_2 \vdash \neg \varphi_{\mathcal{A}_1}}$). Weiterhin

$$T_1 \cup \{\neg \varphi_{\mathcal{A}_1} \mid \mathcal{A}_1 \models T_1\}$$

ist inkonsistent.

Kpt'heit $\Rightarrow$ T_1 impliziert Disjunktion φ endlich vieler $\varphi_{\mathcal{A}_1}$.

Da $\mathcal{H}$ abg. unter $\wedge, \vee$, gilt: $\varphi \in \mathcal{H}$.

$$T_1 \vdash \varphi \quad , \quad T_2 \vdash \neg \varphi = \neg(\varphi_{\mathcal{A}_1} \vee \varphi_{\mathcal{A}_2} \vee \dots \vee \varphi_{\mathcal{A}_n})$$

$$= \neg \varphi_{\mathcal{A}_1} \wedge \neg \varphi_{\mathcal{A}_2} \wedge \dots \wedge \neg \varphi_{\mathcal{A}_n} \qquad \square$$

Def 3.8: Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen und $f: A \to B$ eine Abbildung, die alle Formeln aus einer Menge Δ erhält, dann schreiben wir $f: \mathcal{A} \to_\Delta \mathcal{B}$.

Wir schreiben $\mathcal{A} \Rightarrow_\Delta \mathcal{B}$, falls alle Aussagen aus Δ, welche in $\mathcal{A}$ wahr sind, auch in $\mathcal{B}$ wahr sind.

Lem 3.9: Seien T eine L-Theorie, $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und Δ eine Menge von L-Formeln, welche abgeschlossen unter Existenz-Quantoren, Konjunktion und Variablen-Umbenennung ist. Dann sind äquivalent:

1. Alle Aussagen $\varphi \in \Delta$, welche in $\mathcal{A}$ gelten, sind konsistent mit T.
2. Es gibt ein Modell $\mathcal{B} \models T$ und eine Abbildung $f: \mathcal{A} \to_\Delta \mathcal{B}$.

Bew.: „2. ⇒ 1." Ang., es gibt $f: \mathcal{A} \Rightarrow_\Delta \mathcal{B} \models T$. Dann ist jedes $\varphi \in \Delta$, das in $\mathcal{A}$ wahr ist, auch in $\mathcal{B}$ wahr, also konsistent mit T.

„1. ⇒ 2.": Sei $Th_\Delta(\mathcal{A}_A)$ die Menge aller $\delta(\bar{a})$, $\delta(\bar{x}) \in \Delta$, welche in $\mathcal{A}_A$ gelten. Die Modelle dieser Theorie sind von der Form $(\mathcal{B}, f(a)_{a \in A})$ für Abb. $f: \mathcal{A} \Rightarrow_\Delta \mathcal{B}$ (Lemma 2.12). Es reicht also, ein Modell von $T \cup Th_\Delta(\mathcal{A}_A)$ zu finden.

Wegen Kpt. reicht es zu zeigen, dass diese Theorie endl. erf'bar ist. Das ist der Fall, wenn $T \cup D$ konsistent ist für jede endl. Teilmenge $D \subseteq Th_\Delta(\mathcal{A}_A)$.

Sei $\delta(\bar{a})$ Konj. von Elementen aus D. Dann ist $\mathcal{A}$ ein Modell von $\varphi = \exists \bar{x}\, \delta(\bar{x})$, also ist nach 1. φ konsistent mit T.

$\rightsquigarrow$ gibt $\mathcal{B} \models T$, s.d. $\mathcal{B} \models \varphi$.

$\rightsquigarrow$ gibt $\bar{b}$, s.d. $(\mathcal{B}, \bar{b}) \models \delta(\bar{a})$ □

Kor 3.10: $\mathcal{A} \Rightarrow_\Delta \mathcal{B}$ gilt genau dann wenn es eine Abbildung f und eine Struktur $\mathcal{B}' \equiv \mathcal{B}$ gibt, sodass $f: \mathcal{A} \Rightarrow_\Delta \mathcal{B}'$.

Bew.: $T = Th(\mathcal{B})$ im Lemma. □

$\mathcal{H} = \{$universelle Aussagen$\}$

Satz 3.11: Seien T_1 und T_2 Theorien. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Es gibt eine universelle Aussage, die T_1 von T_2 trennt.
2. Kein Modell von T_2 ist Unterstruktur eines Modells von T_1.

Bew.: „1. ⇒ 2." Sei φ so eine Aussage. Sei $\mathcal{A}_1 \models T_1$ und $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$. Da $\mathcal{A}_1 \models \varphi$: $\mathcal{A}_2 \models \varphi$ nach Lem 3.5. Aber dann $\mathcal{A}_2 \not\models T_2$, denn

(Trennung) $T_2 \vdash \neg\varphi$.

„2. $\Rightarrow$ 1."

„$\neg$1. $\Rightarrow$ $\neg$2." Ang., T_1 und T_2 können nicht durch eine universelle Aussage getrennt werden. Lemma 3.7 $\Rightarrow$ gibt $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ Modelle von T_1, T_2, die nicht durch univ. Aussagen getrennt werden können.

D.h. $\mathcal{A}_2 \Rightarrow_\Delta \mathcal{A}_1$ $\quad$ $\Delta = \{$existenzielle Aussagen$\}$

(Wir schreiben $\mathcal{A}_2 \Rightarrow_\exists \mathcal{A}_1$).

Nach Kor 3.10 gibt es dann $\mathcal{A}_1' \equiv \mathcal{A}_1$ und Abb. $f: \mathcal{A}_2 \Rightarrow_\exists \mathcal{A}_1'$. f erhält insbesondere Q-fr. Aussagen, ist also eine Einbettung.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_2 \cong f(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1'$ U'struktur, d.h. $\neg$2. $\square$

Def 3.12: Sei T eine L-Theorie.

- Zwei L-Formeln $\varphi(\bar{x})$ und $\psi(\bar{x})$ sind <u>äquivalent modulo T</u> (oder <u>relativ zu T</u>), falls
$$T \vdash \forall \bar{x}\,(\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$
- Eine Theorie heißt <u>universell</u>, falls sie nur aus universellen Aussagen besteht.

Kor 3.13: Sei T eine L-Theorie.

1. Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Dann sind äquivalent:
   a) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ist modulo T äquivalent zu einer universellen Aussage.
   b) Sind $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ Modelle von T und $a_1, \ldots, a_n \in A$, dann gilt: $\mathcal{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ impliziert $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.
2. T ist äquivalent zu einer universellen Theorie gdw alle Unterstrukturen von Modellen von T wieder Modelle von T sind.