Kor. 3.13: Sei T eine L-Theorie.

1. Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Dann sind äquivalent:
   a) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ist modulo T äquivalent zu einer universellen Aussage.
   b) Sind $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ Modelle von T und $a_1, \ldots, a_n \in A$, dann gilt:
      $\mathcal{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ impliziert $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.
2. T ist äquivalent zu einer universellen Theorie gdw alle Unterstrukturen von Modellen von T wieder Modelle von T sind.

Def 3.14:

- Eine **$\forall\exists$-Aussage** ist eine Aussage der Form $\forall x_1 \ldots x_n \varphi$ wobei φ existentiell ist.
- Eine **$\exists\forall$-Aussage** ist eine Aussage der Form $\exists x_1 \ldots x_n \varphi$ wobei φ universell ist.
- Eine Theorie heißt **induktiv** falls die Vereinigung jeder gerichteten Familie von Modellen von T wieder ein Modell von T ist.

Lem 3.15: Seien φ eine $\forall\exists$-Aussage, $(A_i)_{i\in I}$ eine gerichtete Familie von Modellen von φ und $B = \bigcup_{i\in I} A_i$. Dann ist B ein Modell von φ.

Satz 3.16: Seien T_1 und T_2 L-Theorien. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt eine $\forall\exists$-Aussage, die T_1 von T_2 trennt.
2. Kein Modell von T_2 ist die Vereinigung einer gerichteten Familie von Modellen von T_1.

Kor 3.17: Sei T eine L-Theorie.

1. Sei φ eine L-Aussage. Dann sind äquivalent:
   a) φ ist modulo T äquivalent zu einer $\forall\exists$-Aussage.
   b) Sind $\mathfrak{A}^0 \subseteq \mathfrak{A}^1 \subseteq \dots$ und $\mathfrak{B} = \bigcup_{i \geq 0} \mathfrak{A}^i$ Modelle von T, dann gilt φ in $\mathfrak{B}$ falls φ in allen $\mathfrak{A}^i$ gilt.
2. T ist äquivalent zu einer Menge von $\forall\exists$-Aussagen gdw T induktiv ist.

§3.3 Quantorenelimination – Theorie

Def 3.18: Eine L-Theorie T hat <u>Quantorenelimination</u> falls jede L-Formel $\varphi(x_1, -, x_n)$ modulo T äquivalent zu einer Quantoren-freien Formel $\psi(x_1, -, x_n)$ ist.

Def 3.19: Eine L-Formel φ heißt <u>einfache Existenzformel</u> falls sie von der Form $\varphi = \exists y\, \psi$ ist für eine Q-fr. Formel ψ.
Ist ψ hier eine Konjunktion von Basis-Formeln, so heißt φ eine <u>primitive Existenzformel</u>.

Lem 3.20: Eine L-Theorie T hat Quantorenelimination gdw jede primitive Existenzformel modulo T äquivalent zu einer Quantoren-freien Formel ist.