Kor. 3.13: Sei T eine L-Theorie.

1. Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Dann sind äquivalent:
   a) $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ist modulo T äquivalent zu einer universellen Formel.
   b) Sind $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ Modelle von T und $a_1, \dots, a_n \in A$, dann gilt:
   $\mathcal{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ impliziert $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.
2. T ist äquivalent zu einer universellen Theorie gdw alle Unterstrukturen von Modellen von T wieder Modelle von T sind.

Syntax

Semantik

Bew.

1. „a) ⇒ b)" Lemma 3.5

„b) ⇒ a)" Erweitere L durch ein n-Tupel neuer Konstanten $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$ und $T_1 = T \cup \{\varphi(\bar{c})\}$, $T_2 = T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\}$

b) ⇒ Ist $\mathcal{B} \models T_1$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ dann $\mathcal{A} \not\models T_2$

Satz 3.11 ⇒ T_1 und T_2 durch universelle $L(\bar{c})$-Aussage $\psi(\bar{c})$ getrennt, d.h. $T_1 \vdash \psi(\bar{c})$
$T_2 \vdash \neg\psi(\bar{c})$

$\Rightarrow T \vdash \forall \bar{x}\, (\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$

$\Rightarrow T \vdash \forall \bar{x}\, (\neg\varphi(\bar{x}) \to \neg\psi(\bar{x}))$

Also: $T \vdash \forall \bar{x}\, (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$

2. „⇒" Ist T äquiv. zu einer univ. Theorie, dann gilt Lem 3.5 jede Aussage in T auch in jeder U'str. von Modellen von T

„⇐" Sei T Theorie mit der Eigenschaft, $\varphi \in T$, $\mathcal{B} \models T$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Dann $\mathcal{A} \models \varphi$, d.h. $\mathcal{A} \not\models \{\neg \varphi\}$ (T_1) (T_2)

Satz 3.11: Gilt univ. Aussage ψ_φ, die T von $\{\neg\varphi\}$ trennt, d.h.

$$T \vdash \psi_\varphi \quad \text{und} \quad \neg\varphi \vdash \neg\psi_\varphi \qquad (\psi_\varphi \rightarrow \varphi)$$

D.h. alle Aussagen in T folgen aus

$$T_\forall = \{\psi \mid T \vdash \psi,\ \psi \text{ universell}\}$$

$\square$

Def 3.14:

- Eine <u>$\forall\exists$-Aussage</u> ist eine Aussage der Form $\forall x_1 \dots x_n\, \varphi$ wobei φ existentiell ist.
- Eine <u>$\exists\forall$-Aussage</u> ist eine Aussage der Form $\exists x_1 \dots x_n\, \varphi$ wobei φ universell ist.
- Eine Theorie heißt <u>induktiv</u> falls die Vereinigung jeder gerichteten Familie von Modellen von T wieder ein Modell von T ist.

Übung:

$\mathcal{H} = \{\forall\exists\text{-Aussagen}\}$, $\mathcal{H}' = \{\exists\forall\text{-Aussagen}\}$

Zeigen Sie: · $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ sind abg. unter $\wedge, \vee$

· $\mathcal{H} = \neg\mathcal{H}'$

$$\forall \bar{x}_1\, \exists \bar{y}_1\, \varphi_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \wedge \forall \bar{x}_2\, \exists \bar{y}_2\, \varphi_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$$

$$\Leftrightarrow \forall \bar{x}_1, \bar{x}_2\, \exists \bar{y}_1, \bar{y}_2\, \varphi_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \wedge \varphi_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$$

und:

$$\neg \forall \bar{x}\, \exists \bar{y}\, \varphi(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\Leftrightarrow \exists \bar{x}\, \forall \bar{y}\, \neg \varphi(\bar{x}, \bar{y})$$

Lem 3.15: Seien φ eine $\forall\exists$-Aussage, $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine gerichtete Familie von Modellen von φ und $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Dann ist $\mathcal{B}$ ein Modell von φ.

Bew.: Schreibe $\varphi = \forall \bar{x}\, \psi(\bar{x})$, wobei $\psi(\bar{x})$ existentiell. Für jedes $\bar{a} \in B$ gibt ein i s.d. $\bar{a}$ schon A_i enthalten ist. Da $\mathcal{A}_i \models \varphi$, gilt $\psi(\bar{a})$ in $\mathcal{A}_i$. Aber $\psi(\bar{a})$ ist existentiell, also gilt $\psi(\bar{a})$ in $\mathcal{B}$ (Lemma 3.5). $\square$

Satz 3.16: Seien T_1 und T_2 L-Theorien. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt eine $\forall\exists$-Aussage, die T_1 von T_2 trennt.
2. Kein Modell von T_2 ist die Vereinigung einer gerichteten Familie von Modellen von T_1.

Bew.:

„1. ⇒ 2." Ang. φ $\forall\exists$-Aussage, die T_1 von T_2 trennt, $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ gerichtete Familie von Modellen von T_1, $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{A}_i$.

Nach Ann. $T_1 \vdash \varphi$, also $\mathcal{A}_i \models \varphi$ $\forall i \in I$.

$\overset{\text{Lem 3.15}}{\rightsquigarrow}$ $\mathcal{B} \models \varphi$.

$\Rightarrow \mathcal{B} \not\models T_2$ (denn $T_2 \vdash \neg\varphi$).

„2. ⇒ 1." : Ang. 1. nicht wahr, d.h. T_1 und T_2 können
„¬1. ⇒ ¬2." nicht durch $\forall\exists$-Aussage getrennt werden.

Lem 3.7 $\rightsquigarrow$ Es gibt Modelle $\mathcal{A} \models T_1$, $\mathcal{B}_0 \models T_2$, die nicht durch eine $\forall\exists$-Aussage getrennt werden können.

D.h. für alle $\forall\exists$-Aussagen φ : $\mathcal{B}_0 \models \neg\varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \neg\varphi$,

äquiv. " " $\exists\forall$-Aussagen ψ : $\mathcal{B}_0 \models \psi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi$

$\psi \overset{\text{"}}{=} \neg\varphi$

$\rightsquigarrow \mathcal{B}_0 \Rightarrow_{\exists\forall} \mathcal{A}$ (Def. 3.8)

Kor 3.10 $\rightsquigarrow$ Es gilt $f : \mathcal{B}_0 \rightarrow_{\exists\forall} \mathcal{A}_0$, wobei $\mathcal{A}_0 \equiv \mathcal{A}$

insbes. $\quad f : \mathcal{B}_0 \rightarrow_{\forall} \mathcal{A}_0$ o.B.d.A. f Inklusion, $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{A}$

$\rightsquigarrow (\mathcal{B}_0)_{B_0} \Rightarrow_{\forall} (\mathcal{A}_0)_{B_0}$ oder äquiv.

$(\mathcal{A}_0)_{B_0} \Rightarrow_\exists (\mathcal{B}_0)_{B_0}$ $\qquad (\neg\forall = \exists)$

Kor. 3.10: $g: (\mathcal{A}_0)_{B_0} \to_\exists (\mathcal{B}_1)_{B_0}$, wobei $(\mathcal{B}_1)_{B_0} \equiv (\mathcal{B}_0)_{B_0}$,

also $\mathcal{B}_0 \prec \mathcal{B}_1$ oBdA g Inklusion, $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$

$\rightsquigarrow \underbrace{\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}_1}_{\prec}$ $\qquad \rightsquigarrow \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \models T_2$

$\mathcal{A}_0 \models T_1$

Wende jetzt auf $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$ an, erhalte induktiv Kette

$\underbrace{\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}_1}_{\prec} \underbrace{\subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{B}_2}_{\prec} \subseteq \ldots$

Sei $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{A}_i = \bigcup \mathcal{B}_i$. $(\mathcal{B}_i)_i$ elementare Kette

$\Downarrow$ Tarskis Kettenlemma, Satz 3.5

$\mathcal{B}_0 \prec \mathcal{B}$, also $\mathcal{B} \models T_2$.

aber auch $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}_i \models T_1$, also $\neg$2. $\qquad \square$

Kor 3.17: Sei T eine L-Theorie.

1. Sei φ eine L-Aussage. Dann sind äquivalent:
   a) φ ist modulo T äquivalent zu einer $\forall\exists$-Aussage.
   b) Sind $\mathcal{A}^0 \subseteq \mathcal{A}^1 \subseteq \ldots$ und $\mathcal{B} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{A}^i$ Modelle von T, dann gilt φ in $\mathcal{B}$ falls φ in allen $\mathcal{A}^i$ gilt.
2. T ist äquivalent zu einer Menge von $\forall\exists$-Aussagen gdw T induktiv ist.

Bew.:

1. „a) ⇒ b)" Sei φ s.d. $\mathcal{A}^i \models \varphi$ für alle i. Wollen: $\mathcal{B} \models \varphi$.

   a) $\rightsquigarrow$ können annehmen, dass φ eine $\forall\exists$-Aussage ist.

$T_1 := T \cup \{\varphi\}$ und $T_2 := T \cup \{\neg\varphi\}$

Dann: $\mathfrak{A}_i \models T_1$, T_1 und T_2 durch φ getrennt

Satz 3.16: $\mathfrak{B}$ kein Modell von T_2, also $\mathfrak{B} \models \varphi$.

„b) ⇒ a)": Sei $T_1 = T \cup \{\varphi\}$, $T_2 = T \cup \{\neg\varphi\}$

b) ⇝ Vereinigung einer gerichteten Fam. von Modellen von T_1 ist kein Modell von T_2.

⇝ Satz 3.16: T_1 und T_2 können durch eine $\forall\exists$-Aussage ψ getrennt werden.

Also: $T_1 \vdash \psi$, also $T \vdash [\varphi \rightarrow \psi]$

$T_2 \vdash \neg\psi$ " $T \vdash [\neg\varphi \rightarrow \neg\psi]$

⇝ $T \vdash [\varphi \leftrightarrow \psi]$.

2. „⇒" 3.16

„⇐" Sei T induktiv und $\varphi \in T$. Sei $T_1 = T$,

$T_2 = \{\neg\varphi\}$

Da T induktiv: Vereinigung von Modellen von T_1 kein Modelle von T_2

Satz 3.16 ⇝ Gibt $\forall\exists$-Aussage ψ, die T_1 von T_2 trennt, d.h. $T \vdash \psi$ und $\neg\varphi \vdash \neg\psi$, also $\psi \vdash \varphi$.

φ Aussage ⇝ $\{\psi \mid \psi\ \forall\exists\text{-Aussage}, T \vdash \psi\} \vdash T$. □