§3.3 Quantorenelimination - Theorie

Def 3.18: Eine $\mathcal{L}$-Theorie T hat <u>Quantorenelimination</u> falls jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ modulo T äquivalent zu einer Quantoren-freien Formel $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ ist.

Def 3.19: Eine $\mathcal{L}$-Formel φ heißt <u>einfache Existenzformel</u> falls sie von der Form $\varphi = \exists y\, \psi$ ist für eine Q-fr. Formel ψ.
Ist ψ hier eine Konjunktion von Basis-Formeln, so heißt φ eine <u>primitive Existenzformel</u>.

Lem 3.20: Eine $\mathcal{L}$-Theorie T hat Quantorenelimination gdw jede primitive Existenzformel modulo T äquivalent zu einer Quantoren-freien Formel ist.

Satz 3.21: Sei T eine L-Theorie. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. T hat Quantorenelimination.
2. Seien $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ Modelle von T mit einer gemeinsamen Unterstruktur $\mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\mathcal{M}^1_A \equiv \mathcal{M}^2_A .$$

3. Seien $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ Modelle von T mit einer gemeinsamen Unterstruktur $\mathfrak{A}$, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine primitive Existenzformel und $a_1, \dots, a_n \in A$. Dann gilt:

$$\mathfrak{M}^1 \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{M}^2 \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

3'. Seien $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ Modelle von T mit einer gemeinsamen Unterstruktur $\mathfrak{A} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ und $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine primitive Existenzformel

$$\mathfrak{M}^1 \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{M}^2 \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

(Für 2. und 3. erlauben wir für $\mathfrak{A}$ hier ausnahmsweise auch die leere „Struktur".)

Def 3.22: Eine Primstruktur für eine Theorie T ist eine L-Struktur, die in jedes Modell von T einbettet.

Lem 3.23: Sei T eine konsistente Theorie mit Quantorenelimination. Besitzt T eine Primstruktur so ist T vollständig.