§3.3 Quantorenelimination - Theorie

Def 3.18: Eine L-Theorie T hat <u>Quantorenelimination</u> falls jede L-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ modulo T äquivalent zu einer Quantoren-freien Formel $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ ist. Schreibe $\varphi(\bar{x}) \equiv \rho(\bar{x})$ mod T.

Bem.:
- $n=0$: Jede L-Aussage ist mod T äquiv. zu einer Q'fr. Aussage.
  Insbesond.: L keine Konstanten $\rightsquigarrow$ $\top, \bot$ einzige Q'fr. Aussagen
  $\rightsquigarrow$ Dann ist T entweder inkonsistent oder vollständig.
- Abhängig von Sprache $\rightsquigarrow$ gibt immer eine „natürliche" Erweiterung der Sprache, s.d. T^M QE hat. (Morleyisation)

Def 3.19: Eine L-Formel φ heißt <u>einfache Existenzformel</u> falls sie von der Form $\varphi = \exists y\, \rho$ ist für eine Q-fr. Formel ρ.
Ist ρ hier eine Konjunktion von Basis-Formeln, so heißt φ eine <u>primitive Existenzformel</u>. $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ $\rho(x_1, \ldots, x_n, y)$

Lem 3.20: Eine L-Theorie T hat Quantorenelimination gdw jede primitive Existenzformel modulo T äquivalent zu einer Quantoren-freien Formel ist.

Bew.:
„$\Rightarrow$" klar. Also nehme an jede primitive Exist. formel ist äqu Q'fr. Formel. Zeige:
Jede einfache Existenzformel ist mod T äqu. zu einer Q-fr. Formel.
Dazu: $\psi(\bar{x}) = \exists y\, \varphi(\bar{x}, y)$

$$\widetilde{q.fr.}$$

$$\rightsquigarrow \text{oE.: } \varphi(\bar{x},y) = \bigvee_i \bigwedge_j \underbrace{\delta_{ij}(\bar{x},y)}_{\text{Basis}}$$

$$\rightsquigarrow \psi(\bar{x}) \equiv \bigvee_i \underbrace{\exists y \bigwedge_j \delta_{ij}(\bar{x},y)}_{=:\rho_i \text{ prim. Ex.-formel}} \mod T$$

Also nach Annahme: ρ_i mod T äquiv. einer q'fr Formel ρ_i'

$\rightsquigarrow \psi(\bar{x}) \equiv \bigvee_i \rho_i'$ mod T, Q'fr.

Jetzt: ψ beliebig, also $\psi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \rho$, wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, ρ Q'fr.

Fall 1: $Q_n = \exists$

$\rightsquigarrow$ nach Ann. gibt ρ_0, Q'fr., s.d. $\rho_0 \equiv \underbrace{\exists x_n \rho}_{\text{einf. Exist.}}$ mod T

$\rightsquigarrow \psi \equiv Q_1 x_1 \ldots Q_{n-1} x_{n-1} \rho_0$ mod T

Fall 2: $Q_n = \forall$

$\rightsquigarrow$ nach Ann. gibt ρ_0 Q'fr., s.d. $\rho_0 \equiv \underbrace{\exists x_n \neg\rho}_{\text{einf. Ex.}}$ mod T

also $\neg\rho_0 \equiv \forall x_n \rho$ mod T

$\rightsquigarrow \psi \equiv Q_1 x_1 \ldots Q_{n-1} x_{n-1} \neg\rho_0$

Iteriere. $\square$

Satz 3.21: Sei T eine L-Theorie. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. T hat Quantorenelimination. } Syntax
2. Seien M_1 und M_2 Modelle von T mit einer gemeinsamen Unterstruktur A. Dann gilt:
   Semantik $M^1_A \equiv M^2_A$.

3. Seien M_1 und M_2 Modelle von T mit einer gemeinsamen Unterstruktur $\mathcal{A}$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine primitive Existenzformel und $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dann gilt:

Semantisch $\quad \mathcal{M}^1 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \mathcal{M}^2 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

3'. Seien M_1 und M_2 Modelle von T mit einer gemeinsamen Unterstruktur $\mathcal{A} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine primitive Existenzformel

$$\mathcal{M}^1 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \mathcal{M}^2 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

(Für 2. und 3. erlauben wir für $\mathcal{A}$ hier ausnahmsweise auch die leere „Struktur".)

Bew.

„1. ⇒ 2." $\mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2 \models T$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2$.

Sei $\varphi(\bar{a})$ eine $L(A)$-Aussage, die in $\mathcal{M}^1$ gilt.

Da T QE hat: $\varphi(\bar{x}) \equiv \mathcal{S}(\bar{x})$ mod T.

$\uparrow$ Q.fr. L-Formel

$$\rightsquigarrow \mathcal{M}^1 \models \varphi(\bar{a}) \overset{M_1 \models T}{\Rightarrow} \mathcal{M}^1 \models \mathcal{S}(\bar{a})$$
$$\overset{\text{Lem. 3.5}}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models \mathcal{S}(\bar{a})$$
$$\Rightarrow \mathcal{M}^2 \models \mathcal{S}(\bar{a})$$
$$\underset{\mathcal{M}^2 \models T}{\Rightarrow} \mathcal{M}^2 \models \varphi(\bar{a})$$

„2. ⇒ 3." Klar

„3. $\Rightarrow$ 1."

Lem 3.20 $\rightsquigarrow$ reicht QE für prim. Ex. Formeln z.z.

Sei $\varphi(\bar x)=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ prim. ex'f. Z.z. äquiv. zu Q.fr. Formel.

Erweitere L durch neue Konst. $c_1,\dots,c_n$. Reicht z.z.

$T\cup\{\varphi(\bar c)\}$ und $T\cup\{\neg\varphi(\bar c)\}$ lassen sich Q'fr. Formel $\delta(\bar x)$ trennen.

(Dann: $T\vdash\forall\bar x\,(\varphi(\bar x)\leftrightarrow\delta(\bar x))$)

Nach Trennungslemma (Lem 3.7) ist das äquiv zu:

(*) Seien $(M^1,\bar a^1)\models T\cup\{\varphi(\bar c)\}$ und $(M^2,\bar a^2)\models T\cup\{\neg\varphi(\bar c)\}$. Dann gibt es Q.fr. $L(\bar c)$-Aussage $\psi(\bar c)$ s.d.

$$(M^1,\bar a^1)\models\psi(\bar c)\quad\text{und}\quad(M^2,\bar a^2)\models\neg\psi(\bar c).$$

?

Anders gesagt:

(*') Seien $M^1,M^2\models T$ und $\bar a^1\in M^1$, $\bar a^2\in M^2$ s.d. $(M^1,\bar a^1),(M^2,\bar a^2)$ dieselben Q.fr. $L(\bar c)$-Aussagen erfüllen. Dann gilt:

$$M^1\models\varphi(\bar a^1)\Rightarrow M_2\models\varphi(\bar a^2)$$

Seien $M^1,M^2,\bar a_1,\bar a_2$ wie in (*') und sei $A^i=\langle\bar a^i\rangle^{M^i}$.

Wir konstruieren jetzt einen Iso. $f: A^1\longrightarrow A^2$, der $\bar a^1$ auf $\bar a^2$ schickt.

Jedes Elt in A^i ist von der Form $t^{M^i}[\bar a^i]$ für einen L-Term $t(\bar x)$ (Lem 1.13). Der Iso f muss erfüllen:

$$f(t^{M^1}[\bar a^1])=t^{M^2}[\overset{f(\bar a^1)}{\overset{\shortparallel}{\bar a_2}}]$$

Wir def. f durch diese Gleichung und zeigen, dass es ein wohldef. Einbettung und bij. ist.

Wohldef.$\overset{\text{Abb.}}{}$: Ang. $s^{\mathcal{M}^1}[\bar{a}^1] = t^{\mathcal{M}^1}[\bar{a}^1]$. Dann gilt in $(\mathcal{M}^1, \bar{a}^1)$ die Aussage $s(\bar{c}) \doteq t(\bar{c})$, also nach Ann. $(*')$ auch in $(\mathcal{M}^2, \bar{a}^2)$. Daher:

$$s^{\mathcal{M}^2}[\bar{a}^2] = t^{\mathcal{M}^2}[\bar{a}^2].$$

Inj.: Wie Wohldef. tausche Rollen von $\mathcal{M}^2$ und $\mathcal{M}^1$.

Surj.: klar

f Hom. + Einbettung:

Zeige: f erhält Relationen:

$$\mathcal{M}^1 \models R[t_1^{\mathcal{M}^1}[\bar{a}^1], \ldots, t_m^{\mathcal{M}^1}[\bar{a}^1]]$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{M}^1, \bar{a}^1) \models R(t_1(\bar{c}), \ldots, t_m(\bar{c}))$$

$$\overset{\text{Ann.}}{\Leftrightarrow} (\mathcal{M}^2, \bar{a}^2) \models R(t_1(\bar{c}), \ldots, t_m(\bar{c}))$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M}^2 \models R[t_1^{\mathcal{M}^2}[\bar{a}^2], \ldots, t^{\mathcal{M}^2}[\bar{a}^2]]$$

$\Rightarrow f$ ist Iso.

$\rightsquigarrow \mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2$ haben isom. U'str.

$\rightsquigarrow$ Können annehmen, dass $A^1 = A^2 \subseteq \mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2$

$\rightsquigarrow (*')$ folgt aus 3.

$\rightsquigarrow$ 1. $\Leftrightarrow$ 2. $\Leftrightarrow$ 3.

„3. $\Rightarrow$ 3.'": klar

„3.' $\Rightarrow$ 3.": Auch klar, $A' := \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \subseteq A$. $\square$