Def 3.22: Eine Primstruktur für eine Theorie T ist eine L-Struktur, die in jedes Modell von T einbettet.

z.B.: $\mathbb{F}_p$ für ACF_p

$\mathbb{Q}$ für ACF_0

Lem 3.23: Sei T eine konsistente Theorie mit Quantorenelimination. Besitzt T eine Primstruktur, so ist T vollständig.

Bew.: M prim für T

φ L-Formel $\leadsto$ in Modellen von T ist φ äquiv. zu Q.fr. Formel $\Rightarrow$

φ gilt in $N \models T$ gdw φ gilt in $M \subseteq N$ (Lem 3.5)

~~$\Rightarrow T \equiv Th(M)$.~~

$\leadsto$ gilt φ in M, dann:

$T \vdash \varphi$

Sonst:

$T \vdash \neg\varphi$ $\square$

§3.4 Quantorenelimination - Beispiele und Anwendungen

$F, K, \mathcal{F}, F$

Satz 3.24: DLO hat Quantorenelimination.

$\mathcal{L} = \{<\}$

Bew.: Seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \models DLO$ und $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine gemeinsame Unterstruktur. OBdA $a_1 < a_2 < \dots a_n$.

Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine primitive Existenzformel s.d. $\mathcal{O}_1 \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$. $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ ist von der Form $\exists y \, \mathcal{S}(y)$, wobei $\mathcal{S}$ eine $\mathcal{L}(A)$-Formel ist.

$\mathcal{O}_1 \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \rightsquigarrow$ es gilt $b_1 \in \mathcal{O}_1$, s.d. $\mathcal{S}(b_1)$ in $\mathcal{O}_1$ gilt.

Wir erweitern die Identität $\begin{aligned} A &\to A \\ a_i &\mapsto a_i \end{aligned}$ zu einer ordnungserhaltenden Abbildung $f: A \cup \{b_1\} \to \mathcal{O}_2$.

$\rightsquigarrow$ Müssen Bild $b_2 \in \mathcal{O}_2$ von b_1 finden.

Mögliche Fälle:

i) $b_1 \in A \rightsquigarrow b_2 := b_1$

ii) $a_i < b_1 < a_{i+1} \rightsquigarrow$ Wähle $b_2 \in \mathcal{O}_2$ mit $a_i < b_2 < a_{i+1}$

iii) $b_1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \rightsquigarrow$ " $b_2 \in \mathcal{O}_2$ " $b_2 < a_1 < \dots < a_n$.

iv) $a_1 < \dots < a_n < b_1 \rightsquigarrow$ " $b_2 \in \mathcal{O}_2$ " $a_1 < \dots < a_n < b_2$

$\rightsquigarrow f$ ist Isomorphismus von $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ord}$ - Strukturen
$A \cup \{b_1\} \to A \cup \{b_2\}$

$A \cup \{b_1\} \models \varphi(a_1, \dots, a_n, b_1) \Rightarrow A_2 \cup \{b_2\} \models \varphi(f(a_1), \dots, f(a_n), f(b_1))$

$$= \varphi(a_1, \dots, a_n, b_2)$$

$\Rightarrow \mathcal{O}_2 \models \varphi(b_2)$ □

Satz 3.25: (Tarski): Die Theorie ACF hat Quantorenelimination.

$L = L_{ring}$

Bew.: Seien K_1, K_2 alg. abg. Körper und R ein gemeinsamer Unterring. Sei $\exists y \varphi(y)$ eine primitive Existenzformel, s.d. $\varphi(y)$ eine $L(R)$-Formel ist. Nehme an:

$$K_1 \models \exists y \varphi(y).$$

Seien F_1, F_2 die Quotientenkörper von R in K_1, K_2. Dann def. $\frac{r}{s} \mapsto \frac{r}{s}$ einen Isomorphismus $f: F_1 \to F_2$, der die Identität auf R ist.

$$\begin{tikzcd}
 & K_2' \arrow[d, dash] \\
K_1 \arrow[d, dash] & K_2 \arrow[d, dash] \\
G_1(b_1) \arrow[r, "h"] \arrow[d, dash] & G_2(b_2) \arrow[d, dash] \\
G_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, dash] & G_2 \arrow[d, dash] \\
F_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, dash] & F_2 \arrow[d, dash] \\
R \arrow[r, "id"] & R
\end{tikzcd}$$

Sei $G_i := acl(F_i)$ der alg. Abschluss. Wir können annehmen, dass $F_i \subset G_i \subset K_i$.
Die Abb. f setzt sich fort zu einem Iso. $g: G_1 \to G_2$.

Wähle $b_1 \in K_1$, s.d. $K_1 \models \varphi(b_1)$.
Wir unterscheiden zwei Fälle:

i) $b_1 \in G_1$. Da g ein Iso. $G_1 \to G_2$ und $g|_R = id_R$, gilt die $L(R)$-

Formel $\varphi(b_1)$ in G_1 g.d.w. $\varphi(g(b_1))$ in G_2 gilt.

$\rightsquigarrow G_2 \models \exists y\, \varphi(y)$.

ii) $b_1 \notin G_1$. Dann ist b_1 transzendent und $G_1(b_1)$ ist isomorph zum rationalen Funktionenkörper $G_1(X)$.

Nach Löwenheim-Skolem (2.15.2) gibt es eine elementare Erw. K_2' von K_2, s.d. $K_2' \neq G_2$. Wähle $b_2 \in K_2' \setminus G_2$.

Auch hier gilt: $G_2(b_2) \cong G_2(X)$

$\rightsquigarrow g$ lässt sich fortsetzen zu einem Isom.

$$h: G_1(b_1) \to G_2(b_2)$$
$$b_1 \mapsto b_2$$

Weil $h|_R = id_R$, also gilt $\varphi(b_1)$ gdw $\varphi(\overset{h(b_1)}{\overset{\parallel}{b_2}})$ gilt. □

Kor. 3.26: Sind K_1, K_2 algebraisch abgeschlossene Körper und $K_1 \subseteq K_2$, dann gilt $K_1 \prec K_2$.

Bew.: 3.21.2.

$\rightsquigarrow$ ACF ist <u>Modell-vollständig</u>

Bem. ACF ist nicht vollständig:

$$\varphi_p: \forall x: \underbrace{x + x + \dots + x}_{p\text{-mal}} \doteq 0$$

$ACF_p = ACF \cup \{\varphi_p\}$ ist vollständig

Kor. 3.27: ACF_p und ACF_0 sind vollständig

Bew: Lem. 3.23, $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Q}$ sind Primstrukturen.

Kor. 3.28 (Hilbertscher Nullstellensatz): Sei K ein Körper. Dann hat jedes echte Ideal $I \subsetneq K[X_1, \ldots, X_n]$ eine Nullstelle im algebraischen Abschluss $\mathrm{acl}(K)$.
D.h. es gibt $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{acl}(K)$, sodass $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ für alle $f \in I$.

Bew.: Da I echtes Ideal ist, ist es enthalten in einem maximalen Ideal P (Lemma von Zorn).

Der Körper $L := K[X_1, \ldots, X_n]/_P$ ist eine Erweiterung von K.

(enthält $K \hookrightarrow L$
$a \longmapsto a+P$ (Injektiv, denn P enthält kein Elt. aus $K \setminus 0$)

$\rightsquigarrow$ Könne jedes $f \in I \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ auch als Polynom über L auffassen via

$$K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow L[Y_1, \ldots, Y_n]$$

$$\sum_{i,j} \underset{\substack{\cap \\ K}}{a_{ij}} \cdot X_i^j \longmapsto \sum_{i,j} (a_{ij}+P) \cdot Y_i^j$$

(*) Aber in L hat jedes $f \in I$ eine Nullstelle, nämlich $(X_1+P, \ldots, X_n+P)$.

$$\sum_{i,j} (a_{ij}+P) \cdot (X_i+P)^j = 0+P = 0_L$$

Hilbertscher Basissatz: I ist endl. erzeugt.

$\Rightarrow I = (f_0, \ldots, f_{m-1})$

Def.: $\mathcal{L}(K)$-Aussage:

$$\varphi := \exists x_1 \dots x_n \bigwedge_{i \leq k} f_i(x_1, \dots, x_n) \doteq 0$$

Dann gilt φ in L (*) und daher auch in $acl(L)$.

Da $K \subseteq L$, können wir annehmen, dass $acl(K) \subseteq acl(L)$

Nach Kor 3.26 (Modellvollständigkeit von ACF) gilt

aber $acl(K) \prec acl(L)$. Also gilt φ in $acl(K)$. $\square$