Dr. V. Gradinaru D-ITET, RW Herbst 2022

Probeprüfung Lineare Algebra

Matrikel-Nr: ______________________	
Exam-ID: __________	Initialen: __________
Datum	Freitag, 02. Dezember 2022

1	2	3	4	5	Total	Bonus
6 P	6 P	6 P	6 P	6 P	30 P	Übungen

Zu den Aufgaben dürfen Sie erst auf Anweisung der Assistierenden umblättern! Sie können die Hinweise jedoch jetzt durchlesen.

Allgemeine Hinweise:

******* *Dies ist eine freiwillige Probeprüfung – Die folgenden Hinweise wurden von der Prüfung im Sommer 2022 übernommen und ergänzt und dienen dazu, Ihnen einen Eindruck zu geben, was in der wirklichen Prüfung auf Sie zukommen wird.* *******

- Tragen Sie Ihre **Matrikel-Nummer**, **Initialen** und **Exam-ID** oben auf diesem Deckblatt ein. *(Ihre Exam-ID steht auf dem separaten Beiblatt, welches Ihnen zusammen mit dieser Prüfung verteilt wurde.)*
- Diese Prüfung ist **anonymisiert**: Bitte tragen Sie auf den abgegebenen Blättern jeweils nur Ihre Initialen und Ihre Matrikel-Nummer ein (**nicht** Ihren vollständigen Namen).
- Prüfungsdauer: **120 Minuten** (+10 Minuten Lesezeit).
- Verwenden Sie die ersten 10 Minuten um alle Aufgaben in Ruhe zu lesen. Schreiben ist in dieser Zeit verboten. Die Prüfungszeit beginnt erst nach dieser Lesezeit.

- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine**.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet (jeweils 6 Punkte). Die Prüfung besteht aus drei schriftlichen Aufgaben sowie zwei Multiple-Choice-Aufgaben.
- Beginnen Sie jede der drei schriftlichen Aufgaben auf einem neuen Blatt Papier und schreiben Sie Ihre Initialen und Matrikel-Nummer auf **alle** Blätter. Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert! Versuchen Sie, Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen, und arbeiten Sie sorgfältig.
- Die zwei Multiple-Choice-Aufgaben werden auf dem separaten Beiblatt ausgefüllt und maschinell korrigiert. Machen Sie ein deutliches Kreuz in schwarz oder blau und benützen Sie Tippex, falls Sie eine Antwort korrigieren möchten. Begründungen sind für diese zwei Aufgaben nicht nötig.

Vor dem Start der Prüfung:

- Ihre Matrikel-Nr., Initialen und Exam-ID sollten korrekt auf diesem Deckblatt eingetragen sein.
- Schalten Sie Ihr **Handy** aus und verstauen Sie es in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihre **Legi** auf den Tisch.
- Legen Sie genug **leere Blätter** auf dem Tisch bereit, sodass Sie nicht mehr zur Tasche greifen müssen.

- ○ Mit dem Ausfüllen der Vorderseite dieses Deckblattes bestätigen Sie, dass Sie die Anweisungen gelesen und verstanden haben.
- ○ Bitte beachten Sie: falls Sie das Handy auf die Toilette mitbringen, wird Ihnen dies in jedem Fall als Betrugsversuch ausgelegt. Dies führt zu einer Eins und allenfalls weiteren disziplinarischen Folgen. Daher, legen Sie bitte Ihr Handy weg.

Bei Fragen und Unklarheiten fragen Sie die anwesenden Assistenten.

Viel Erfolg!

Notenskala: Die maximal erreichbare Punktzahl ist 30. Für die Note 6.00 benötigen Sie mindestens 28 und für die Note 4.00 mindestens 14 Punkte.

1. [6 Punkte]

Wir möchten die Determinante der folgenden $n \times n$-Matrix für allgemenes $n \in \mathbb{N}$ berechnen:

$$\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & & \\ -1 & 1 & 2 & & & \\ & -1 & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 & 2 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Leiten Sie die Rekursionsgleichung

$$\det D_n = \det D_{n-1} + 2 \det D_{n-2}$$

für $n > 2$ her, indem Sie die Determinante von D_n nach geeigneten Zeilen und Spalten entwickeln.

b) Sei nun $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine allgemeine Folge, die

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \tag{1}$$

für alle $n > 2$ erfüllt. Betrachten Sie den Ansatz $a_n = r^n$ und bestimmen Sie zwei verschiedene r_1, r_2 derart, dass (1) erfüllt ist.

c) Zeigen Sie, dass jede Linearkombination $\{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung von (1) ist.

d) Berechnen Sie $\det D_1$ und $\det D_2$ und bestimmen Sie daraus α_1 und α_2. Folgern Sie daraus schliesslich die Formel für $\det D_n$.

2. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -6 & -10 & 2 \\ -2 & 6 & -6 & c & 2 \\ -2 & -4 & b & -10 & 2 \\ -2 & -4 & -6 & 15 & 2 \\ 2 & a & 6 & 10 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie a, b, c so, dass die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die so gefundenen Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung der gefundenen Matrix $\mathbf{A}$ an.

Bitte wenden!

3. [6 Punkte]

a) Ein Experiment ergibt die folgenden Messungen für die unbekannten Grössen x_1, x_2 und x_3:

x_1	$x_1 + x_2$	$x_1 + x_3$	$x_2 + x_3$	x_3
6	1	-3	5	-2

Schreiben Sie diese Ergebnisse als lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

indem Sie die Matrix $\mathbf{A}$ und den Vektor $\mathbf{b}$ angeben.

b) Was ist der Rang der Matrix $\mathbf{A}$? Wie viele Lösungen hat dieses lineare Gleichungssystem?

c) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}\,.$$

für diese Daten eine eindeutige Lösung hat.

d) Zeigen Sie für eine beliebige Matrix A, dass das Residuum

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y}$$

orthogonal auf $\mathbf{Bild}(\mathbf{A})$ steht, solange die Lösung $\mathbf{y}$ aus Teilaufgabe **c)** existiert.

4. [6 Punkte] Kreuzen Sie auf dem Beiblatt an, welche der folgenden Aussagen für beliebige $n \times n$-Matrizen A und B richtig sind. (Beachten Sie, dass die Reihenfolge der Aussagen wahrscheinlich nicht dieselbe ist.)

a) $\det(2A) = 2\det(A)$

b) $\det(A) = a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$, wenn $a_{ij} = 0$ für $i + j > n + 1$

c) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

d) $\det(AB) = \det(BA)$

e) Wenn A singulär ist, dann ist auch AB singulär.

f) $\det(A^\top A) = \det(A)^2$

5. [6 Punkte] Bestimmen Sie für jede der folgenden Teilmengen der Menge aller Polynome vom Grad kleiner als 8, also $\mathscr{P}_8$, ob sie linear unabhängig in $(\mathscr{P}_8, +, \cdot)$ sind. Kreuzen Sie die linear unabhängigen Mengen auf dem Beiblatt an.

a) Die Menge $\{p_1, p_2, p_3\}$, wobei

$$p_1(t) = t(t-1), \quad p_2(t) = t^2 - t^3 + 1, \quad p_3(t) = t^4 + t^2.$$

b) Die Menge $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, wobei

$$p_1(t) = (t+1)(t-1), \quad p_2(t) = t(t+1), \quad p_3(t) = (t^3+1)(t^3-1), \quad p_4(t) = t - 1.$$

c) Die Menge $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$, wobei

$$p_1(t) = t(t+1), \quad p_2(t) = t^3 + 3t + 1, \quad p_3(t) = (t^2+1)(t^3+4),$$
$$p_4(t) = -3t + 2t^3 + 2, \quad p_5(t) = t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1.$$