Musterlösung Probeprüfung Lineare Algebra

1. a) (2 P) *1. Möglichkeit:* Wir entwickeln die Determinante nach der ersten Spalte und anschliessend nach der ersten Zeile.

$$\det D_n = 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ -1 & 1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 & 2 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} - (-1) \det \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 & 2 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{[1 Punkt]}$$

$$= \det D_{n-1} + 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -1 & 1 & 2 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{[0.5 Punkte]}$$

$$= \det D_{n-1} + 2 \det D_{n-2} \quad \text{[0.5 Punkte]}$$

2. Möglichkeit: Wir entwickeln die Determinante zuerst nach der ersten Zeile, dann nach der ersten Spalte.

$$\det D_n = 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ -1 & 1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 & 2 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 & 2 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{[1 Punkt]}$$

$$= \det D_{n-1} - 2(-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -1 & 1 & 2 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{[0.5 Punkte]}$$

$$= \det D_{n-1} + 2 \det D_{n-2} \quad \text{[0.5 Punkte]}$$

b) (1 P) Wir setzen $a_n = r^n$ in (1) ein und erhalten

$$\begin{aligned} & r^n = r^{n-1} + 2r^{n-2} \\ \Leftrightarrow \quad & r^2 - r - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (r-2)(r+1) = 0. \quad \text{[0.5 Punkte]} \end{aligned}$$

Somit ist $r_1 = 2$ und $r_2 = -1$. [0.5 Punkte]

c) (1 P) Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Weil $\{r_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{r_2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Rekursionsgleichung (1) erfüllen, folgt

$$\begin{aligned} \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n &= \alpha_1(r_1^{n-1} + 2r_2^{n-2}) + \alpha_2(r_2^{n-1} + 2r_2^{n-2}) \quad \text{[0.5 Punkte]} \\ &= (\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + 2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}). \quad \text{[0.5 Punkte]} \end{aligned}$$

Somit erfüllt auch $\{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Rekursionsgleichung (1).

d) (2 P) Es gilt

$$\det D_1 = 1, \quad \det D_2 = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3. \quad \text{[0.5 Punkte]}$$

Wir wollen nun α_1 und α_2 so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} \alpha_1 r_1^1 + \alpha_2 r_2^1 &= \det D_1 \\ \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 &= \det D_2 \end{aligned}$$

gilt. Nach Einsetzen der berechneten Zahlen für $r_1, r_2, \det D_1, \det D_2$ erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 - \alpha_2 &= 1 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 &= 3 \quad \text{[0.5 Punkte]} \end{aligned}$$

mit der Lösung $\alpha_1 = 2/3$ und $\alpha_2 = 1/3$ [0.5 Punkte]. Somit folgt

$$\det D_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}. \quad \text{[0.5 Punkte]}$$

2. Wir notieren wie immer die Spalten von $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix}.$$

a) (1.5 P) Es gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = -8 + 2a, \\ 0 &= \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle = 18 - 2b, \\ 0 &= \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4 \rangle = -20 - 2c, \end{aligned}$$

also $a = 4$, $b = 9$ und $c = -10$. [1 Punkt]Man überprüft auch: $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 0$ für alle i, j [0.5 Punkte] und damit sind die Spaltenvektoren paarweise orthogonal.

b) (1 P) Wir wissen aus der Vorlesung, dass orthogonale Vektoren, die verschieden vom Nullvektor sind, linear unabhängig sind. [1 Punkt]

Alternativ lässt sich diese Aussage wie folgt beweisen:

Seien $\lambda_1, \ldots \lambda_5 \in \mathbb{R}$ so, dass $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \lambda_4 \mathbf{a}_4 + \lambda_5 \mathbf{a}_5 = 0$. [0.5 Punkte]
Da die Spalten orthogonal sind, folgt

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \lambda_4 \mathbf{a}_4 + \lambda_5 \mathbf{a}_5 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \langle \mathbf{a}_1, \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \lambda_4 \mathbf{a}_4 + \lambda_5 \mathbf{a}_5 \rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad & \lambda_1 \|\mathbf{a}_1\|^2 = \lambda_1 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle + \lambda_2 \underbrace{\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}_{=0} + \lambda_3 \underbrace{\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle}_{=0} + \lambda_4 \underbrace{\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4 \rangle}_{=0} + \lambda_5 \underbrace{\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5 \rangle}_{=0} = 0. \quad \text{[0.5 Punkte]} \end{aligned}$$

Es folgt wegen $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, dass $\lambda_1 = 0$. Analog erhalten wir $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, also sind die Vektoren linear unabhängig.

c) (3.5 P) Wir wissen, dass die Spalten von A orthogonal sind. [0.5 Punkte] Wir berechnen nun die Normen der Spaltenvektoren. Es gilt

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}_1\| &= \sqrt{25} = 5,\\ \|\mathbf{a}_2\| &= \sqrt{100} = 10,\\ \|\mathbf{a}_3\| &= \sqrt{225} = 15,\\ \|\mathbf{a}_4\| &= \sqrt{625} = 25,\\ \|\mathbf{a}_5\| &= \sqrt{25} = 5, \qquad \text{[1 Punkt]}\end{aligned}$$

Es folgt dann, dass

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}\right) = \left[\frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}, \frac{\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_2\|}, \frac{\mathbf{a}_3}{\|\mathbf{a}_3\|}, \frac{\mathbf{a}_4}{\|\mathbf{a}_4\|}, \frac{\mathbf{a}_5}{\|\mathbf{a}_5\|}\right] \qquad \text{[1 Punkt]}$$

eine orthogonale Matrix ist. Ausserdem gilt mit

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{[1 Punkt]}$$

die Beziehung

$$\mathbf{QR} = \mathbf{A}\,.$$

3. a) (1 P) Die Fehlergleichungen für das Experiment sind

$$\begin{aligned} x_1 \quad\;\; &= 6,\\ x_1 + x_2 &= 1,\\ x_1 + x_3 &= -3,\\ x_2 + x_3 &= 5,\\ x_3 \quad\;\; &= -2\,. \end{aligned}$$

In Matrixform gilt $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{[0.5 Punkte]} \quad b = \begin{bmatrix} 6\\ 1\\ -3\\ 5\\ -2 \end{bmatrix}. \quad \text{[0.5 Punkte]}$$

b) (1 P) Der obere 3×3-Block ist eine untere Dreicksmatrix mit 1-en auf der Diagonale, somit hat A Rang 3 [0.5 Punkte]; man sieht, dass die letzte Gleichung nicht mit den Gleichungen 1 und 3 kompatibel ist, also es gibt keine Lösungen. [0.5 Punkte]

Alternative: Gauss-Elimination.

c) (2 P) Man rechnet:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4\\ 6\\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{[0.5 Punkte]}$$

Gauss-Elimination führt zu

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}. \quad \text{[1 Punkt]}$$

Somit hat diese Matrix auch Rang 3 und damit hat das System $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung. [0.5 Punkte]

Alternativ, aber schwieriger, kann man zeigen, dass $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}$ denselben Rang haben.

d) **(2 P)** Aus $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ folgt $\mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y}) = 0$, d.h $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y}$ liegt in $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^T)$. [1 Punkt] Punkt 2) aus dem Fundamentalsatz der linearen Algebra besagt, dass $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^T)$ orthogonal auf $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ steht. Somit ist $\mathbf{r}$ othogonal auf $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$. [1 Punkt]

4. **a)** **(1 P)** Falsch: Per Definition ist die Determinante eine multilineare Abbildung in jeder Zeile und Spalte. Somit ist $\det(2A) = 2^n \det(A)$.

b) **(1 P)** Falsch: Die Bedingung $a_{ij} = 0$ für $i + j > n + 1$ bedeutet, dass A eine linksobere Dreiecksmatrix ist, und das Produkt $a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$ beschreibt das Produkt der Gegendiagonaleinträge. Die Formel wäre korrekt für ungerade n, aber für gerade n gilt $\det(A) = -a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$. Ein konkretes Gegenbeispiel für $n = 2$ ist

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \cdot 1.$$

c) **(1 P)** Falsch: Die Determinante ist per Definition eine mulitilineare Abbildung in jeder Zeile und Spalte, aber keine lineare Abbildung an sich. Zum Beispiel sieht man das an

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) **(1 P)** Wahr: Es gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA).$$

e) **(1 P)** Wahr: Eine Matrix ist genau dann singulär, wenn ihre Determinante verschwindet. Ist also A singulär, dann gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0,$$

und somit ist auch AB singulär.

f) **(1 P)** Wahr: Es gilt

$$\det(A^\top A) = \det(A^\top)\det(A) = \det(A)^2.$$

5. Wir erinnern, dass lineare Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ definiert wird durch die Implikation

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Ebenfalls erinnern wir daran, dass zwei Polynome genau dann gleich sind, wenn sie in allen Koeffizienten übereinstimmen.

a) (2 P) Linear unabhängig: Sei $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$ (wobei die rechte Seite als das Nullpolynom aufzufassen ist). Ein Vergleich der t^4-Koeffizienten liefert direkt $\alpha_3 = 0$, und ein Vergleich der t^3-Koeffizienten liefert $\alpha_2 = 0$. Es verbleibt also $\alpha_1 p_1 = 0$ und somit auch $\alpha_1 = 0$.

b) (2 P) Linear unabhgig: Sei $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4 = 0$. Ein Vergleich der t^6-Koeffizienten liefert $\alpha_3 = 0$ und es verbleibt

$$0 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_4 p_4 = \alpha_1(t^2 - 1) + \alpha_2(t^2 + t) + \alpha_4(t - 1) = (\alpha_1 + \alpha_2)t^2 + (\alpha_2 + \alpha_4)t + (-\alpha_1 - \alpha_4).$$

Koeffizientenvergleich der restlichen drei Terme ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 &= 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Summe der drei Gleichungen liefert $\alpha_2 = 0$, und durch Zurückeinsetzen auch $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$.

c) (2 P) Linear unabhängig: Sei $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4 + \alpha_5 p_5 = 0$. Koeffizientenvergleich für die t^6-, t^5- und t^2-Terme liefert $\alpha_5 = 0$, $\alpha_3 = 0$ bzw. $\alpha_1 = 0$. Es verbleibt

$$0 = \alpha_2 p_2 + \alpha_4 p_4 = (\alpha_2 + 2\alpha_4)t^3 + (3\alpha_2 - 3\alpha_4)t + (\alpha_2 + 2\alpha_4),$$

was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_2 + 2\alpha_4 &= 0 \\ 3\alpha_2 - 3\alpha_4 &= 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

führt. Aus der zweiten Gleichung folgt $\alpha_2 = \alpha_4$, und aus der ersten dann $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$.