Lineare Algebra für D-ITET, RW

Serie 1

Aufgabe 1.1

1.1a) Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & bx_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5 \\ & & 2bx_2 & + & 2ax_3 & = & b \end{array}$$

Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

- Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,
- Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,
- eindeutig lösbar ist,
- keine Lösung hat.

Hinweis: Benutzen Sie den Gauss-Algorithmus und führen Sie dabei geeignete Fallunterscheidungen durch.

1.1b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & ax_3 & = & 0 \end{array}$$

eine nichttriviale Lösung (das heisst die Lösung ist ungleich Null)? Geben Sie für diesen Fall die Lösungsmenge an.
Hinweis: Durch Vertauschen von zwei Zeilen kann hier beim Gauss-Algorithmus eine mögliche Division durch 0 verhindert werden.

Aufgabe 1.2

Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, mit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -13 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.

Aufgabe 1.3

Multiple Choice: Online abzugeben.
Man löse die folgenden zwei Gleichungssysteme mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & b_3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & b_4 \end{array}$$

1.3a) Für $b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 2$ ist die Lösung:

(i) $x_4 = \frac{7}{4},\ x_3 = -3,\ x_2 = \frac{3}{2},\ x_1 = 1$

(ii) $x_4 = \frac{6}{4},\ x_3 = -2,\ x_2 = \frac{5}{2},\ x_1 = 2$

(iii) $x_4 = \frac{5}{4},\ x_3 = -4,\ x_2 = \frac{7}{2},\ x_1 = 3$

(iv) $x_4 = \frac{3}{4},\ x_3 = -6,\ x_2 = \frac{9}{2},\ x_1 = 4$

1.3b) Für $b_1 = 0,\ b_2 = -3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1$ ist die Lösung:

(i) $x_4 = -5,\ x_3 = 14,\ x_2 = -7,\ x_1 = -11$

(ii) $x_4 = -4,\ x_3 = 13,\ x_2 = -6,\ x_1 = -10$

(iii) $x_4 = -3,\ x_3 = 12,\ x_2 = -5,\ x_1 = -9$

(iv) $x_4 = -2,\ x_3 = 11\ x_2 = -4,\ x_1 = -8$

Aufgabe 1.4

Multiple Choice: Online abzugeben. Eventuell sind mehrere Antworten richtig.
Wir betrachten im Folgenden ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen, n Spalten und Rang r.

1.4a) Das Gleichungssystem ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn

(i) $m > n$

(ii) $r < m$

1.4b) Ein homogenes Gleichungssystem hat genau dann *keine* nicht-trivialen Lösungen, wenn

(i) $r = m$

(ii) $r = n$

1.4c) Sei $m = n$. Das zugehörige homogene Gleichungssystem $Ax = b = 0$ habe nicht-triviale Lösungen. Dann

(i) gibt es für beliebige rechte Seiten mindestens eine Lösung.

(ii) gibt es rechte Seiten $b \neq 0$, so dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Abgabe:

In der Woche vom 26. September 2022 beim *zugeteilten* Assistenten.