Dr. V. Gradinaru
F. Jin

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 1

Aufgabe 1.1

1.1a) Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & bx_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5 \\ & & 2bx_2 & + & 2ax_3 & = & b \end{array}$$

Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

- Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,
- Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,
- eindeutig lösbar ist,
- keine Lösung hat.

Hinweis: Benutzen Sie den Gauss-Algorithmus und führen Sie dabei geeignete Fallunterscheidungen durch.

Lösung: Mit dem Gauss-Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & b & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2b & 2a & b \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & b & 4 & 5 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 2a & b \end{array} \quad (*)$$

<u>**Fall** $\mathbf{b = 0}$</u>: Zeilen vertauschen:

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

i) <u>$a = 0$</u>: $x_3 = s,\ x_2 = t,\ x_1 = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}s$ $\rightarrow$ 2 Parameter;
ii) <u>$a \neq 0$</u>: $x_3 = 0,\ x_2 = t,\ x_1 = \frac{5}{3}$ $\rightarrow$ 1 Parameter.

<u>**Fall** $\mathbf{b \neq 0}$</u>: $-2b$ Pivot in $(*)$:

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & b & 4 & 5 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & b \end{array}$$

i) <u>$a = 0$</u>: keine Lösung;
ii) <u>$a \neq 0$</u>: $x_3 = \frac{b}{2a},\ x_2 = 0,\ x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2b}{3a}$ $\rightarrow$ eindeutig.

Also:

- Lösungen mit *zwei* freien Parametern: $a = 0,\ b = 0$
- Lösungen mit *einem* freien Parameter: $a \neq 0,\ b = 0$
- eindeutig lösbar: $a \neq 0,\ b \neq 0$
- keine Lösung: $a = 0,\ b \neq 0$.

1.1b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & ax_3 & = & 0 \end{array}$$

eine nichttriviale Lösung (das heisst die Lösung ist ungleich Null)? Geben Sie für diesen Fall die Lösungsmenge an.
Hinweis: Durch Vertauschen von zwei Zeilen kann hier beim Gauss-Algorithmus eine mögliche Division durch 0 verhindert werden.

Lösung: Mit dem Gauss-Algorithmus erhält man (mit Zeilenvertauschen):

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 2 & 0 & a & 0 \end{array} \xrightarrow[\text{1. und 3.}]{\text{Vertauschen}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & a & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow[\text{2. und 3. Zeile}]{\text{Elimination 1. Spalte}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & -a/2 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2/2 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{2. und 3.}]{\text{Vertauschen}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a^2/2 & 0 \\ 0 & a & -a/2 & 0 \end{array} \xrightarrow[\text{3. Zeile}]{\text{Elimination 2. Spalte}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & -a/2 + a^3/2 & 0 \end{array}$$

Nach Auflösen einer quadratischen Gleichung in der letzten Zeile und aufgrund vom ersten nicht-Null Element von der 1. und 2. Zeile können wir ablesen, dass es für genau $a = 0, a = 1, a = -1$ eine nichttriviale Lösung gibt, und zwar:

$$x_3 = t,\ x_2 = a^2 t/2,\ x_1 = -at/2,\ \text{wobei } t \in \mathbb{R}.$$

Lösungsmenge: $L = \{(-at/2, a^2t/2, t)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 1.2

Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, mit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -13 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.

Lösung: Für $i = 1, 2$ entspricht $Ax = b_i$ ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3. Wie in Serie 1, Aufgabe 1, kann man beide rechte Seiten im gleichen Gauss-Schema schreiben (der Hauptteil ist gleich). Es folgt:

$$\begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 5 & -13 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 15 & 10 & 5 & 15 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 5 & -13 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & 6 & 14 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 5 & -13 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{array}$$

Für b_1 folgt also:

$$\begin{aligned}
&x_3 \text{ beliebig, also } x_3 = t \in \mathbb{R} \text{ ist ein freier Parameter,}\\
&x_2 + 6x_3 = 3 \;\Rightarrow\; x_2 = 3 - 6t,\\
&5x_1 - 13x_2 + 2x_3 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = (1 - 2t + 13(3 - 6t))/5 = 8 - 16t.
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $Ax = b_1$ ist also

$$L_1 = \left\{ (8 - 16t, 3 - 6t, t)^\top \in \mathbb{R}^3 \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für b_2 folgt analog

$$\begin{aligned}
&x_3 \text{ beliebig, also } x_3 = s \in \mathbb{R} \text{ ist ein freier Parameter,}\\
&x_2 + 6x_3 = 7 \;\Rightarrow\; x_2 = 7 - 6s,\\
&5x_1 - 13x_2 + 2x_3 = -1 \;\Rightarrow\; x_1 = (-1 - 2s + 13(7 - 6s))/5 = 18 - 16s.
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $Ax = b_2$ ist somit

$$L_2 = \left\{ (18 - 16s, 7 - 6s, s)^\top \in \mathbb{R}^3 \middle| \; s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 1.3

Multiple Choice: Online abzugeben.
Man löse die folgenden zwei Gleichungssysteme mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_1\\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & b_2\\
x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & b_3\\
x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & b_4
\end{array}$$

1.3a) Für $b_1 = 1,\; b_2 = 3,\; b_3 = 2,\; b_4 = 2$ ist die Lösung:

(i) $x_4 = \frac{7}{4},\; x_3 = -3,\; x_2 = \frac{3}{2},\; x_1 = 1$

(ii) $x_4 = \frac{6}{4},\; x_3 = -2,\; x_2 = \frac{5}{2},\; x_1 = 2$

$\surd$ (iii) $x_4 = \frac{5}{4},\; x_3 = -4,\; x_2 = \frac{7}{2},\; x_1 = 3$

(iv) $x_4 = \frac{3}{4},\; x_3 = -6,\; x_2 = \frac{9}{2},\; x_1 = 4$

1.3b) Für $b_1 = 0,\ b_2 = -3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1$ ist die Lösung:

√ (i) $x_4 = -5,\ x_3 = 14,\ x_2 = -7,\ x_1 = -11$

(ii) $x_4 = -4,\ x_3 = 13,\ x_2 = -6,\ x_1 = -10$

(iii) $x_4 = -3,\ x_3 = 12,\ x_2 = -5,\ x_1 = -9$

(iv) $x_4 = -2,\ x_3 = 11\ x_2 = -4,\ x_1 = -8$

Lösung: Mit dem Gauss–Algorithmus erhält man für die beiden Fälle:

$$\begin{array}{cccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 18 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 12 & -5 & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & -10 \end{array}$$

Es folgt durch Rückwärtseinsetzen:

a) $x_4 = \frac{5}{4},\ x_3 = -4,\ x_2 = \frac{7}{2},\ x_1 = 3$, also die dritte Antwort.

b) $x_4 = -5,\ x_3 = 14,\ x_2 = -7,\ x_1 = -11$, also die erste Antwort.

Aufgabe 1.4

Multiple Choice: Online abzugeben. Eventuell sind mehrere Antworten richtig.
Wir betrachten im Folgenden ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen, n Spalten und Rang r.

1.4a) Das Gleichungssystem ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn

$\surd$ (i) $m > n$

Denn damit ist $r \leq n < m$, und damit ist der zweite Teil von Bemerkung 1.2.0.17 anwendbar.

$\surd$ (ii) $r < m$

Siehe Bemerkung 1.2.0.17.

1.4b) Ein homogenes Gleichungssystem hat genau dann *keine* nicht-trivialen Lösungen, wenn

(i) $r = m$

Betrachte als Gegenbeispiel $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist $r = m = 1$, aber $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist eine nicht-triviale Lösung.

$\surd$ (ii) $r = n$

Da homogene Gleichungssysteme immer die triviale Lösung besitzen, ist Satz 1.2.0.19 anwendbar. Somit ist die triviale Lösung eindeutig, also gibt es keine nicht-trivialen Lösungen.

1.4c) Sei $m = n$. Das zugehörige homogene Gleichungssystem $Ax = b = 0$ habe nicht-triviale Lösungen. Dann

(i) gibt es für beliebige rechte Seiten mindestens eine Lösung.

Zum Beispiel führt die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ auf ein homogenes System mit der Lösung $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Für rechte Seiten der Form $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$, $b \neq 0$ gibt es jedoch keine Lösung.

$\surd$ (ii) gibt es rechte Seiten $b \neq 0$, so dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Obiges Beispiel mit z.B. der rechten Seite $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, hat Lösungen der Form $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$.
Allgemein gilt nach Satz 1.2.0.19, dass ein homogenes Gleichungssystem nur die triviale Lösung besitzt, wenn $r = n$. Deshalb haben wir in unserem Fall $r < n$, und je nach dem, ob die b die Kompatibitilitätsbedinungen erfüllt, hat $Ax = b$ eine $n - r$-parametrige Schar von Lösungen oder keine. Damit ist die Aussage wahr.