

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Serie 2

Aufgabe 2.1

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2.1a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:

$$AB, BA, Ax, A^2 := AA, B^2, BB^\top, B^\top B, y^\top x, yx, xy^\top, B^\top y, y^\top B.$$

2.1b) (*freiwillig!*) Lösen Sie 2.1a) nochmals mit Hilfe von PYTHON.

Aufgabe 2.2

2.2a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ -6x_1 + 4x_2 + 14x_3 &= -2 \end{aligned}$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung mit Zeilenvertauschung (Gauss-Elimination).

2.2b) (*freiwillig!*) Lösen Sie das Gleichungssystem in Teilaufgabe 2.2a) nochmals mit Hilfe von PYTHON, zuerst direkt mittels der Operation `numpy.linalg.solve`, dann mittels LR-Zerlegung gegeben durch `scipy.linalg.lu`, also `P, L, U = lu(A)`, und der Operation `solve`.

Aufgabe 2.3

2.3a) Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $(AB)^T$, $A^T B^T$ und $B^T A^T$.

2.3b) Zeigen Sie, dass für *beliebige* quadratische Matrizen C gilt, dass $C + C^T$ symmetrisch ist.

Aufgabe 2.4

2.4a) Bestimmen Sie die 3×3 -Matrizen, die beim Anwenden (von links) auf eine 3×3 -Matrix A Folgendes bewirken:

- (i) E_{21} : subtrahiert dreimal die erste Zeile von der zweiten;
- (ii) E_{31} : addiert zweimal die erste Zeile zur dritten;
- (iii) E_{32} : subtrahiert einmal die zweite Zeile von der dritten;
- (iv) P : vertauscht die zweite und die dritte Zeile.

2.4b) Seien A und R die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 14 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie Matrizen M_1 , M_2 und M_3 , so dass

$$M_1 M_2 M_3 A = R,$$

wobei M_1 , M_2 und M_3 Matrizen aus Teilaufgabe 2.4a) sind.

Aufgabe 2.5

Multiple Choice: Online abzugeben.

2.5a) Ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit A orthogonal (d. h. $AA^T = A^T A = I_n$) ist für beliebige rechte Seiten b eindeutig lösbar.

- (i) richtig
- (ii) falsch

2.5b) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5, \\2x_1 &+ x_3 = 3, \\6x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3.\end{aligned}$$

Führt man den ersten Gauss-Schritt mit Pivot in der Zeile 1 aus, so erhält man die folgende augmentierte (oder erweiterte) Matrix:

(i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3/4 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{array} \right)$

(ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{array} \right)$

(iii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array} \right)$

(iv) Keine der obigen drei Matrizen stellt die augmentierte Matrix nach dem ersten Gauss-Schritt dar.

Jemand erhält als Resultat der Gaußelimination die augmentierte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a(1-a) & b(1-a) \end{array} \right).$$

2.5c) Wenn $b = 0$, dann hat das Gleichungssystem immer genau eine Lösung.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

2.5d) Wenn $a \neq 0$, dann hat das Gleichungssystem immer genau eine Lösung.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

2.5e) Wenn $a = 2$ und $b = 1$, dann ist $(2.5, -0.5, -0.5)^\top$ die einzige Lösung.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

2.5f) Wenn $a = 1$, dann ist die Lösungsmenge $\{(1, \lambda, -\lambda)^\top : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

Abgabe:

Bis 7. Oktober, 10:00 Uhr im Vorraum vor dem HG G 53.2. Bitte geben Sie auch die Programmieraufgaben ausgedruckt ab.