Dr. V. Gradinaru
F. Jin

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 2

Aufgabe 2.1

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2.1a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:
$AB,\ BA,\ Ax,\ A^2 := AA,\ B^2,\ BB^\top,\ B^\top B,\ y^\top x,\ yx,\ xy^\top,\ B^\top y,\ y^\top B.$

Lösung: Es gilt:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 8 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 & -9 \\ 10 & 1 & -3 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BB^\top = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -4 & 6 \\ -4 & 5 & -4 \\ 6 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^\top B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$$

$$y^\top x = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = 25$$

$$xy^\top = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -14 & 7 & 35 \\ -8 & 4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$B^\top y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y^\top B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Die Matrixprodukte BA, B^2 und yx sind nicht definiert.

2.1b) (*freiwillig!*) Lösen Sie 2.1a) nochmals mit Hilfe von PYTHON.

Lösung:

```
import numpy as np

A = np.array([[4,1,-2],[2,0,1],[2,-1,1]])
B = np.array([[2,3],[1,-2],[0,2]])
x = np.array([[1],[7],[4]])
y = np.array([[-2],[1],[5]])

products = [A@B, A@x, A@A, B@B.T, B.T@B, y.T@x, x@y.T, B.T@y, y.T@B]
for i in products:
  print(i)
```

Aufgabe 2.2

2.2a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -6x_1 & + & 4x_2 & + & 14x_3 & = & -2 \end{array}$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung mit Zeilenvertauschung (Gauss-Elimination).

Lösung: Bestimmung der Matrizen L, R und P, so dass $LR = PA$:

$$\begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 & * & * & * & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & -6 & 4 & 14 \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 & * & * & * & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & * & * & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & * & * & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Zeile 2 - }(-1)\times\text{Zeile 1} \\ \text{Zeile 3 - }3\times\text{Zeile 1} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 & * & * & * & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & * & * & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & * & * & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \left\{ \text{Permutation Zeile } 2 \leftrightarrow 3 \right.$$

$$\rightarrow \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 & * & * & * & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & * & * & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & * & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \left\{ \text{Zeile 3 - }0\times\text{Zeile 2} \right.$$

Daraus lassen sich die Matrizen

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

und

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ablesen, für die $LR = PA$ gilt. Wir erhalten für die Lösung c von $Lc = Pb$

$$c = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich die Lösung

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.2b) (*freiwillig!*) Lösen Sie das Gleichungssystem in Teilaufgabe 2.2a) nochmals mit Hilfe von PYTHON, zuerst direkt mittels der Operation '`numpy.linalg.solve`', dann mittels LR-Zerlegung gegeben durch '`scipy.linalg.lu`', also '`P,L,U = lu(A)`', und der Operation '`solve`'.

Lösung: Das lineare Gleichungssystem kann mit Hilfe von PYTHON wie folgt gelöst werden:

```
import numpy as np
from scipy.linalg import lu
from numpy.linalg import solve

A = np.array([[-2,1,4],[2,-1,-1],[-6,4,14]])
b = np.array([[-1],[4],[-2]])
P,L,U = lu(A) #PA = LU
Pb = P @ b #Pb = PAx = LUx
Ux = solve(L,Pb)
x = solve(U,Ux)
```

Als kleine Bemerkung, wir sehen, dass PYTHON eine andere Permutationsmatrix `P` hat, als die, die wir errechnet hatten in Teilaufgabe 2.2a). Dies liegt darin, dass der Computer Zahlen auf bestimmte Nachkommastellen rundet. Dabei entstehen sogenannte Rundungsfehler. Die Permuationsmatrix, die PYTHON gewählt hat, minimisiert diesen Rundungsfehler, unter anderem.

Aufgabe 2.3

2.3a) Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $(AB)^T$, $A^T B^T$ und $B^T A^T$.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
(AB)^T &= \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \right)^T \\
&= \begin{bmatrix} 27 & -18 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -18 & 9 \end{bmatrix}, \\
A^T B^T &= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -5 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 15 \\ 29 & -1 & -11 \\ -28 & 15 & 22 \end{bmatrix}, \\
B^T A^T &= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -18 & 9 \end{bmatrix} = (AB)^T.
\end{aligned}
$$

2.3b) Zeigen Sie, dass für *beliebige* quadratische Matrizen C gilt, dass $C + C^T$ symmetrisch ist.

Lösung: Sei C eine $n \times n$-Matrix:

$$(C + C^T)^T \overset{\text{Satz 1.3.0.6 (5)}}{=} C^T + (C^T)^T = C^T + C \overset{\text{Satz 1.3.0.6 (1)}}{=} C + C^T,$$

also ist $C + C^T$ symmetrisch (Definition 1.3.0.3).

Aufgabe 2.4

2.4a) Bestimmen Sie die 3×3-Matrizen, die beim Anwenden (von links) auf eine 3×3-Matrix A Folgendes bewirken:

(i) E_{21}: subtrahiert dreimal die erste Zeile von der zweiten;

(ii) E_{31}: addiert zweimal die erste Zeile zur dritten;

(iii) E_{32}: subtrahiert einmal die zweite Zeile von der dritten;

(iv) P: vertauscht die zweite und die dritte Zeile.

Lösung: Wir haben

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4b) Seien A und R die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 14 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie Matrizen M_1, M_2 und M_3, so dass

$$M_1 M_2 M_3 A = R,$$

wobei M_1, M_2 und M_3 Matrizen aus Teilaufgabe 2.4a) sind.

Lösung: Die Matrizen sind $M_1 = E_{32}$, $M_2 = E_{31}$ und $M_3 = E_{21}$. Der Gaussalgorithmus angewandt auf die Matrix A ergibt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 14 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = R$$

Daher gilt:

$$E_{32}E_{31}E_{21}A = R.$$

Bemerkung: Die Matrizen E_{31} und E_{21} können vertauscht werden, d. h. es gilt ebenso

$$E_{32}E_{21}E_{31}A = R.$$

Aufgabe 2.5

Multiple Choice: Online abzugeben.

2.5a) Ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit A orthogonal (d. h. $AA^T = A^TA = I_n$) ist für beliebige rechte Seiten b eindeutig lösbar.

$\surd$ (i) richtig (ii) falsch

Da A orthogonal ist, ist A insbesondere regulär: $A^{-1} = A^T$. Für reguläre Matrizen A ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für beliebige rechte Seiten lösbar, siehe Bemerkung 1.2.0.22.

2.5b) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5, \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 3, \\ 6x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3. \end{array}$$

Führt man den ersten Gauss-Schritt mit Pivot in der Zeile 1 aus, so erhält man die folgende augmentierte (oder erweiterte) Matrix:

(i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3/4 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{array}\right)$

(ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{array}\right)$

√ (iii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array}\right)$

(iv) Keine der obigen drei Matrizen stellt die augmentierte Matrix nach dem ersten Gauss-Schritt dar.

Jemand erhält als Resultat der Gausselimination die augmentierte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a(1-a) & b(1-a) \end{array}\right).$$

2.5c) Wenn $b = 0$, dann hat das Gleichungssystem immer genau eine Lösung.

(i) Richtig.

√ (ii) Falsch.

Wenn $a = 1$, dann besteht die letzte Zeile nur aus Nullen und wir können z frei wählen. Als Lösungsmenge erhalten wir somit $\{(1, -\lambda, \lambda)^\top : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Wir haben also mindestens einen Fall, für welchen wir unendlich viele Lösungen bekommen.

2.5d) Wenn $a \neq 0$, dann hat das Gleichungssystem immer genau eine Lösung.

(i) Richtig.

√ (ii) Falsch.

Wenn $a = 1$, so gibt es in der untersten Zeile kein Pivot, und das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. So zum Beispiel sind $(1, 1, -1)^\top$ und $(1, -1, 1)^\top$ Lösungen.

2.5e) Wenn $a = 2$ und $b = 1$, dann ist $(2.5, -0.5, -0.5)^\top$ die einzige Lösung.

(i) Richtig.

$\surd$ (ii) Falsch.

Die einzige Lösung in diesem Fall ist $(0.5, 0.5, -0.5)$.

2.5f) Wenn $a = 1$, dann ist die Lösungsmenge $\{(1, \lambda, -\lambda)^\top : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\surd$ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

$a = 1$ impliziert, dass das Gleichungssystem von b befreit ist. Dann erhalten wir durch Rückwärtseinsetzen die oben gegebene Lösungsmenge.