Dr. V. Gradinaru
F. Jin

Herbstsemester 2022

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Serie 3

Aufgabe 3.1

Gegeben sei

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2/5 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

3.1a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A, d.h. Matrizen L, U und P, für welche $PA = LU$ gilt.

3.1b) *(freiwillig!)* Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit PYTHON. Lösen Sie anschliessend die Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, für

$$b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 15/4 \\ 7/4 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung in PYTHON.

Hinweis: Suchen Sie online nach dem PYTHON-Befehl scipy.linalg.lu.

Aufgabe 3.2

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

3.2a) Für welche Werte von α ist $A(\alpha)$ invertierbar? Berechnen Sie $(A(\alpha))^{-1}$ für diese Werte.

Hinweis: Benutzen Sie den Gauss-Algorithmus (Gauss-Jordan-Algorithmus) um die Inverse zu berechnen.

Aufgabe 3.3 Blockmatrixmultiplikation

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & -1 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^k, k \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von Blockmatrixmultiplikation, nachdem Sie die Matrix geeignet partitioniert haben.

Aufgabe 3.4

Multiple Choice: Online abzugeben.

Seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad B = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x_2 \end{bmatrix}.$$

Für welche reellen Zahlen x_1 und x_2 gilt $B = A^{-1}$?

(i) $x_1 = 1,\ x_2 = 1.$

(ii) $x_1 = -1,\ x_2 = 1.$

(iii) $x_1 = 1,\ x_2 = -1.$

(iv) $x_1 = -1,\ x_2 = -1.$

Aufgabe 3.5

Multiple Choice: Online abzugeben.

Gegeben seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n,n}$, zwei quadratische invertierbare Matrizen. Wir nehmen an, dass auch die Summe $A + B$ invertierbar ist. Welche der folgenden Ausdrücke stellen die Inverse C^{-1} von $C := A^{-1} + B^{-1}$ dar?

(i) $A(A+B)^{-1}B\,,$ (ii) $B(A+B)^{-1}A\,,$ (iii) $BA(A+B)^{-1}\,.$

Hinweis: Es kann hilfreich sein, während der Rechnung, die folgenden Identitäten geschickt zu verwenden:

$$I = A^{-1}A\,, \quad I = B^{-1}B\,.$$

Aufgabe 3.6

Multiple Choice: Online abzugeben.

3.6a) Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

(i) A_1 ist nicht orthogonal.

(ii) A_2 ist nicht orthogonal, aber die inverse A_2^{-1} ist es.

3.6b) Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$, so dass $A^T A$ die Einheitsmatrix I_n ist. Dann gilt:

(i) A ist orthogonal und $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

Aufgabe 3.7

Multiple Choice: Online abzugeben.

Gegeben sei die orthogonale Matrix

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & d \\ e & 0 & f \end{bmatrix}.$$

3.7a) Welche der folgenden Werte sind möglich?

(i) $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $e = \frac{1}{3}$ (iii) $e = 0$ (iv) $e = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

3.7b) Welche der folgenden Wertepaare sind möglich?

(i) $a = 1, c = -1$ (ii) $a = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$ (iii) $a = -\frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$ (iv) Keine dieser

3.7c) Wie viele mögliche Parameterkombinationen gibt es für B?

(i) 0 (iii) 2 (v) 6 (vii) 16

(ii) 1 (iv) 4 (vi) 8 (viii) Unendliche

3.7d) Welche der folgenden Werte sind möglich?

(i) $f = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $f = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (iii) $f = \frac{2}{\sqrt{6}}$ (iv) $f = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Abgabe:

Bis 14. Oktober, 10:00 Uhr im Vorraum vor dem HG G 53.2. Bitte geben Sie auch die Programmieraufgaben ausgedruckt ab.