Dr. V. Gradinaru
F. Jin

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 3

Aufgabe 3.1

Gegeben sei

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2/5 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

3.1a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A, d.h. Matrizen L, U und P, für welche $PA = LU$ gilt.

Lösung: Wir gehen vor wie Beispiel 1.6.0.6 und führen die Gauss-Elimination an A durch:

$$\begin{aligned} & E_{21}A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & E_{31}E_{21}A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & 38/5 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & P_{23}E_{31}E_{21}A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4/5 & 38/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} = U\,, \end{aligned}$$

wobei

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} & P_{23}E_{31}E_{21}A = U \\ \Leftrightarrow \quad & E'_{21}P_{23}E_{21}A = U \\ \Leftrightarrow \quad & E'_{21}E'_{31}P_{23}A = U\,, \end{aligned}$$

wobei

$$E'_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E'_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nun können wir von links mit den Inversen der Elementarmatrizen multiplizieren und wir erhalten

$$PA = LU$$

mit

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4/5 & 38/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.1b) *(freiwillig!)* Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit PYTHON. Lösen Sie anschliessend die Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, für

$$b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 15/4 \\ 7/4 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung in PYTHON.

Hinweis: Suchen Sie online nach dem PYTHON-Befehl scipy.linalg.lu.

Lösung: Die folgenden Zeilen liefern die gewünschte Zerlegung:

Listing 3.1: Serie 3, Aufgabe 3.1b)

```
import numpy as np
import scipy.linalg as la

#Initialisierung
A=np.array([[5, 1, 2],[2, 2/5, 1],[-4,0,6]])
b_1=np.array([[7],[3],[-2]])
b_2=np.array([[15/4],[7/4],[9/2]])

#LR-Zerlegung
P,L,U= la.lu(A)
print("P: \n {0} \nL: \n {1} \nU: \n {2} \n".format(P,L,U))

#LUx = Pb; Loesung durch Vorwaerts- und Rueckwaertseinsetzen
x=[la.solve(U,la.solve(L,P@b_1)),la.solve(U,la.solve(L,P@b_2))]
print("x_1: \n {0} \nx_2: \n {1}".format(x[0],x[1]))
```

Aufgabe 3.2

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

3.2a) Für welche Werte von α ist $A(\alpha)$ invertierbar? Berechnen Sie $(A(\alpha))^{-1}$ für diese Werte.

Hinweis: Benutzen Sie den Gauss-Algorithmus (Gauss-Jordan-Algorithmus) um die Inverse zu berechnen.

Lösung: Wir führen einen Schritt des Gauss-Algorithmus aus und erhalten

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Es folgt, dass für $\alpha = 1$ die letzte Zeile eine Nullzeile und deshalb die Matrix nicht invertierbar ist. Falls $\alpha \neq 1$, führen wir den Gauss-Algorithmus weiter und es gilt

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2+\frac{1}{\alpha-1} & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2+\frac{1}{\alpha-1} & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2+\frac{1}{\alpha-1} & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right].$$

Wir erhalten also, dass

$$(A(\alpha))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha-1} & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} \\ 2+\frac{1}{\alpha-1} & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} \end{bmatrix},$$

falls $\alpha \neq 1$.

Aufgabe 3.3 Blockmatrixmultiplikation

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & -1 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^k, k \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von Blockmatrixmultiplikation, nachdem Sie die Matrix geeignet partitioniert haben.

Lösung: Wir setzen $B = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right]$ und schreiben A als Blockmatrix

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ B & -I_2 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe der Blockmatrixmultiplikation ergibt sich

$$A^2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = I_4.$$

Daraus erhalten wir $A^3 = A^2 A = I_4 A = A$. Für die vierte Potenz: $A^4 = A^2 A^2 = I_4$, usw. Somit ist allgemein für $k \geq 0$:

$$A^k = \begin{cases} I_4 & k \text{ gerade} \\ A & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 3.4

Multiple Choice: Online abzugeben.

Seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad B = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x_2 \end{bmatrix}.$$

Für welche reellen Zahlen x_1 und x_2 gilt $B = A^{-1}$?

(i) $x_1 = 1,\ x_2 = 1.$

(ii) $x_1 = -1,\ x_2 = 1.$

√ (iii) $x_1 = 1,\ x_2 = -1.$

(iv) $x_1 = -1,\ x_2 = -1.$

Das Produkt $A \cdot B = C = (C_{ij})$ muss gleich der Einheitsmatrix I_3 sein. Unter anderem muss also $C_{11} = 1$ sein. Dieser Eintrag ist das Produkt der ersten Zeile von A mit der ersten Spalte von B. Daraus folgt $x_1 = 1$. Genauso folgern wir, dass $C_{33} = 1$. Das Produkt der dritten Zeile von A mit der dritten Spalte von B liefert dann $x_2 = -1$. Für die Probe multipliziert man die beiden Matrizen und erhält als Produkt $A \cdot B = I_3$.

Aufgabe 3.5

Multiple Choice: Online abzugeben.

Gegeben seien $A,\ B \in \mathbb{R}^{n,n}$, zwei quadratische invertierbare Matrizen. Wir nehmen an, dass auch die Summe $A + B$ invertierbar ist. Welche der folgenden Ausdrücke stellen die Inverse C^{-1} von $C := A^{-1} + B^{-1}$ dar?

$\checkmark$ (i) $A(A+B)^{-1}B\,,$ $\checkmark$ (ii) $B(A+B)^{-1}A\,,$ (iii) $BA(A+B)^{-1}\,.$

Hinweis: Es kann hilfreich sein, während der Rechnung, die folgenden Identitäten geschickt zu verwenden:

$$I = A^{-1}A\,, \quad I = B^{-1}B\,.$$

Wir berechnen für alle Kandidaten das Matrixprodukt von C mit allen Kandidaten für die Inverse und überprüfen, ob wir am Ende die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^n$ erhalten.

$$\begin{aligned}
(A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B &= \underbrace{A^{-1}A}_{=I=B^{-1}B}(A+B)^{-1}B + B^{-1}A(A+B)^{-1}B \\
&= B^{-1}B(A+B)^{-1}B + B^{-1}A(A+B)^{-1}B \\
&= B^{-1}\underbrace{(B+A)(A+B)^{-1}}_{=I}B \\
&= B^{-1}B = I\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1}A &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + \underbrace{B^{-1}B}_{=I=A^{-1}A}(A+B)^{-1}A \\
&= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + A^{-1}A(A+B)^{-1}A \\
&= A^{-1}\underbrace{(B+A)(A+B)^{-1}}_{=I}A \\
&= A^{-1}A = I\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A^{-1}+B^{-1})BA(A+B)^{-1} &= A^{-1}BA(A+B)^{-1} + \underbrace{B^{-1}B}_{=I}A(A+B)^{-1} \\
&= A^{-1}BA(A+B)^{-1} + A(A+B)^{-1} \\
&= (A^{-1}B+I)A(A+B)^{-1} \\
&= A^{-1}(B+A)A(A+B)^{-1}
\end{aligned}$$

Aber weil A im Allgemeinen nicht mit $(B+A)$ kommutiert, erhalten wir nicht die Einheitsmatrix. Nehmen wir z.B. $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, also $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ und $B = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, also $B^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
(A^{-1} + B^{-1}) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\
(A + B)^{-1} &= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\
BA &= \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ und somit gilt} \\
(A^{-1} + B^{-1})BA(A + B)^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

Multiple Choice: Online abzugeben.

3.6a) Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

√ (i) A_1 ist nicht orthogonal.

Richtig, die Spalten sind zwar normiert, aber das Skalarpodukt beider Spalten ist 1 – sie stehen also nicht orthogonal zueinander. Auch ist A_1 noch nicht einmal invertierbar, aber jede orthogonale Matrix ist invertierbar.

(ii) A_2 ist nicht orthogonal, aber die inverse A_2^{-1} ist es.

Falsch. Es ist zwar richtig, dass A_2 nicht orthogonal ist (die zweite Spalte ist nicht normiert), aber dann ist automatisch auch die Inverse nicht orthogonal. Eine Matrix A ist orthogonal genau dann wenn es die Inverse ist.

3.6b) Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$, so dass $A^T A$ die Einheitsmatrix I_n ist. Dann gilt:

(i) A ist orthogonal und $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$.

Falsch, denn A ist keine quadratische Matrix (insbesondere nicht invertierbar) und somit nicht orthogonal.

√ (ii) A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\,x\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Richtig, denn $\|A\,x\| = \sqrt{(Ax)^T Ax} = \sqrt{x^T A^T Ax} = \sqrt{x^T x} = \|x\|$.

(iii) Sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

Falsch, das gilt nie. Ein Gegenbeispiel: Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dann gilt $A^T A = I_2$ und mit $B = A^T$ ist also BA orthogonal, aber $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist nicht orthogonal (noch nicht einmal invertierbar). Oder noch einfacher: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dann $A^T A = I_1$ (die 1×1-Einheitsmatrix, welche natürlich orthogonal ist) und mit $B = A^T$ ist BA orthogonal, aber $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist nicht orthogonal.

Aufgabe 3.7

Multiple Choice: Online abzugeben.

Gegeben sei die orthogonale Matrix

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & d \\ e & 0 & f \end{bmatrix}.$$

3.7a) Welche der folgenden Werte sind möglich?

√ (i) $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $e = \frac{1}{3}$ (iii) $e = 0$ √ (iv) $e = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Die Norm des ersten Spaltenvektors muss 1 sein, also gilt $(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + e^2 = 1$, und daher $e = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.7b) Welche der folgenden Wertepaare sind möglich?

(i) $a = 1, c = -1$ (ii) $a = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$ (iii) $a = -\frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$ √ (iv) Keine dieser

Das Skalarprodukt des ersten und zweiten Spaltenvektors muss Null ergeben: $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot c + e \cdot 0 = 0$, also muss $c = -a$ gelten. Ausserdem muss die Norm des zweiten Spaltenvektors gleich 1 sein, also $a^2 + (-a)^2 + 0 = 1$ und $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sowie $c = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.7c) Wie viele mögliche Parameterkombinationen gibt es für B?

(i) 0 (iii) 2 (v) 6 (vii) 16

(ii) 1 (iv) 4 √ (vi) 8 (viii) Unendliche

Es gibt zwei mögliche Werte von e, und unabhängig davon zwei mögliche Werte für das Paar a, c. Den dritten Spaltenvektor kann man über das Vektorprodukt des ersten und zweiten Spaltenvektors bestimmen, das Vorzeichen kann hier wieder frei gewählt haben. Alle möglichen Kombinationen dieser Wahlen ergeben $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Lösungen.

3.7d) Welche der folgenden Werte sind möglich?

(i) $f = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $f = \frac{1}{\sqrt{6}}$ √ (iii) $f = \frac{2}{\sqrt{6}}$ (iv) $f = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Den dritten Spaltenvektor kann man über das Vektorprodukt des ersten und zweiten Spaltenvektors bestimmen, das Vorzeichen kann frei gewählt werden. Also ist $f = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}$.