Dr. V. Gradinaru
F. Jin

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Serie 4

Aufgabe 4.1 Orthogonale Matrix

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & u & x \\ \frac{2}{3} & v & y \\ \frac{1}{3} & 0 & z \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $u,\ v,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A orthogonal wird. Geben Sie alle vier Möglichkeiten an.

Aufgabe 4.2 Householdertransformation

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, die den Nullpunkt enthält. Man kann dann durch einen Normalenvektor v, der orthogonal zur Hyperebene Σ ist, die Spiegelung an der Hyperebene Σ beschreiben. Ist v als Spaltenvektor gegeben und I die n-dimensionale Einheitsmatrix, dann wird die entsprechende lineare Abbildung durch die folgende Matrix $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt:

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T.$$

4.2a) Beweisen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $(vv^T)^T = vv^T$.

4.2b) Beweisen Sie, dass H eine Orthogonalmatrix ist.

4.2c) Beweisen Sie, dass $H^2 = I$ gilt.

Aufgabe 4.3

Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Geben Sie die Matrizen Q und R einer QR-Zerlegung von A an.

Aufgabe 4.4

Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kann entweder durch Drehung oder Spiegelung realisiert werden. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Berechnen Sie eine Drehmatrix Q_{21} und eine Spiegelungsmatrix H_1, so dass

$$Q_{21}A = R_1, \qquad H_1 A = R_2,$$

wobei R_1 und R_2 Rechtsdreiecksmatrizen sind. Geben Sie dann für $i = 1, 2$ eine orthogonale Matrix Q_i und eine Rechtsdreiecksmatrix R_i an, so dass $A = Q_i R_i$.

Aufgabe 4.5

Bestimmen Sie, ob $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation $\cdot$ und der Addition $\oplus$, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei für zwei Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in V$ die Addition $x \oplus y$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in V.$$

Aufgabe 4.6

4.6a) Sei V die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$: $V = \left\{[x, y, 2x + y]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

4.6b) Ist die Menge $W = \left\{[x, 2x + 1, x]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.7

Wir betrachten den linearen Raum $V := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ über $\mathbb{C}$, d.h., den Raum aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Für alle $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir

$$c_j(x) := \cos(jx), \qquad s_j(x) := \sin(jx), \qquad e_j(x) := \exp(\mathrm{i}jx), \tag{4.7.1}$$

wobei hier $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit bezeichnet. Für $k \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig, sind die Unterräume

$$W_1 := \operatorname{span}\{e_{-k}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_k\} \qquad \text{und} \qquad W_2 := \operatorname{span}\{c_0, \ldots, c_k, s_1, \ldots, s_k\} \tag{4.7.2}$$

von V gegeben. Zeigen Sie, dass $W_1 = W_2$.

Hinweis: Es gilt $\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.

Aufgabe 4.8

(freiwillig!)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{für } i = j \text{ oder } j = n, \\ a_{ij} = -1 & \text{für } i > j, \\ a_{ij} = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ durch $b = Ax$, wobei $x_i = (-1)^i$ für $i = 1, \ldots, n$. Lösen Sie mithilfe von PYTHON das Gleichungssystem $Ax = b$ für $n = 10, 20, .., 1000$ jeweils einmal mit der LR-Zerlegung und einmal mit der QR-Zerlegung. Ploten Sie die jeweiligen relativen Fehler der beiden Methoden in der Euklidischen Norm, $\frac{\|x_{lu}(n)-x\|_2}{\|x\|_2}$ und $\frac{\|x_{qr}(n)-x\|_2}{\|x\|_2}$, in einem Bild.

Hinweis: Vervollständigen Sie die gegebene Programmvorlage. Die Matrix A können Sie mithilfe des Befehls `numpy.tri` definieren. Definieren Sie die Methoden `lu(A)` und `qr(A)` mithilfe der Befehle `scipy.linalg.lu`, `scipy.linalg.qr` und `scipy.linalg.solve`, um die Systeme zu lösen. Für die Euklidische Norm $\|x\|_2$ nutzen Sie `numpy.linalg.norm(x)`. Um zwei Plots in einem Bild zu haben, betrachten Sie `matplotlib.pyplot.subplots(3,1)`.

Aufgabe 4.9

Multiple Choice: Online abzugeben.

4.9a) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

(i) A, B, C und D sind Givens-Rotationen.

(ii) A, B und C sind Givens-Rotationen, nicht aber D.

(iii) Matrix A entspricht einer Drehung um ϕ im Uhrzeigersinn.

(iv) Matrix A entspricht einer Drehung um ϕ im Gegenuhrzeigersinn.

(v) Matrix B entspricht einer Drehung um ϕ um die $e^{(1)}$-Achse, wobei $e^{(1)} = (1, 0, 0)^T$.

(vi) Matrix C entspricht einer Drehung um ϕ um die $e^{(2)}$-Achse im Gegenuhrzeigersinn von der positiven $e^{(2)}$-Achse aus betrachtet.

(vii) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(2)}$-Ebene.

(viii) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(3)}$-Ebene.

Aufgabe 4.10

Multiple Choice: Online abzugeben.

4.10a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Die Menge aller $n \times n$-Matrizen bildet einen reellen Vektorraum.

(ii) Die Menge aller regulären $n \times n$-Matrizen bildet einen reellen Vektorraum.

4.10b) Die Menge $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ bildet einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

Abgabe:

Bis 21. Oktober, 10:00 Uhr im Vorraum vor dem HG G 53.2. Bitte geben Sie auch die Programmieraufgaben ausgedruckt ab.