Dr. V. Gradinaru
F. Jin

Herbstsemester 2022

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 4

Aufgabe 4.1 Orthogonale Matrix

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & u & x \\ \frac{2}{3} & v & y \\ \frac{1}{3} & 0 & z \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $u,\, v,\, x,\, y,\, z \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A orthogonal wird. Geben Sie alle vier Möglichkeiten an.

Lösung: Um die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & u & x \\ \frac{2}{3} & v & y \\ \frac{1}{3} & 0 & z \end{bmatrix}, \quad u,\, v,\, x,\, y,\, z \in \mathbb{R}$$

zu vervollständigen nutzen wir folgende Eigenschaften orthogonaler 3×3 Matrizen:

- Der Spaltenraum von A wird von zueinander senkrecht stehenden Vektoren $s_1,\, s_2,\, s_3$ aufgespannt, welche jeweils die Länge 1 haben.
- Der Zeilenraum von A wird von zueinander senkrecht stehenden Vektoren $z_1,\, z_2,\, z_3$ aufgespannt, welche jeweils die Länge 1 haben.

In unserem Fall sind die Vektoren welche Spalten- resp. Zeilenraum aufspannen

$$s_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},\; s_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix},\; s_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

resp.

$$z_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ u \\ x \end{pmatrix},\; z_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ v \\ y \end{pmatrix},\; z_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

- Aus der Bedingung, dass alle Vektoren jeweils Länge 1 haben müssen, erhalten wir z_3:

$$1 = \|z_3\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2 + z^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + z^2}$$
$$\Rightarrow z = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

- Weiter erhalten wir aus der Bedingung, dass s_1 und s_2 senkrecht zueinander stehen, dass

$$\begin{aligned} 0 = \langle s_1,\, s_2 \rangle &= \frac{2}{3}u + \frac{2}{3}v + \frac{1}{3}\cdot 0 \\ \Rightarrow v &= -u\,. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Zudem muss auch hier gelten $\|s_2\| = 1$, also

$$1 = \sqrt{u^2 + v^2 + 0^2}.$$

Kombinieren wir dies mit (**??**), erhalten wir

$$u = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

- Wir fahren fort und testen, wann s_3 senkrecht auf s_1 und s_2 steht.

$$\begin{aligned} 0 = \langle s_1,\, s_3 \rangle &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \Rightarrow x &= -y - \frac{1}{2}z\,. \end{aligned}$$

Durch

$$\begin{aligned} 1 = \|z_2\| &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + v^2 + y^2} = \sqrt{\frac{16+18}{36} + y^2} \\ \Rightarrow y &= \pm\frac{\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

erhalten wir eine Bedingung für die Variable y.

- Um sicher zu gehen, testen wir noch

$$1 = \|s_3\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \left(y + \frac{1}{2}z\right)^2 + y^2 + z^2 = 2y^2 + yz + \frac{5}{4}z^2 = \frac{12}{9} + yz$$

$\Rightarrow yz$ muss negativ sein.

Also bleiben folgende Möglichkeiten übrig:

$$\begin{aligned} \mathbb{L} = \Bigg\{ (u, v, x, y, z) &= \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \text{ oder} \\ (u, v, x, y, z) &= \left(\mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Somit bekommen wir die orthogonalen Matrizen

$$A \in \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 4.2 Householdertransformation

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, die den Nullpunkt enthält. Man kann dann durch einen Normalenvektor v, der orthogonal zur Hyperebene Σ ist, die Spiegelung an der Hyperebene Σ beschreiben. Ist v als Spaltenvektor gegeben und I die n-dimensionale Einheitsmatrix, dann wird die entsprechende lineare Abbildung durch die folgende Matrix $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt:

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T.$$

4.2a) Beweisen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $(vv^T)^T = vv^T$.

Lösung: Sei $v = [v_1, \ldots, v_n]^T$. Dann gilt

$$vv^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot [v_1, \cdots, v_n] = \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & \cdots & v_1v_n \\ v_2v_1 & v_2^2 & \cdots & v_2v_n \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1}v_1 & \cdots & v_{n-1}^2 & v_{n-1}v_n \\ v_nv_1 & v_nv_2 & \cdots & v_n^2 \end{bmatrix} = (vv^T)^T.$$

Alternativ folgt mit der Regel $(AB)^T = B^T A^T$ direkt, dass $(vv^T)^T = (v^T)^T v^T = vv^T$.

4.2b) Beweisen Sie, dass H eine Orthogonalmatrix ist.

Lösung: Mit Hilfe von 4.2a) erhalten wir

$$\begin{aligned} H^T H &= \Big(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\Big)^T \Big(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\Big) = \Big(I - 2\frac{(vv^T)^T}{v^Tv}\Big)\Big(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\Big) \\ &= \Big(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\Big)\Big(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\Big) = I - 4\frac{vv^T}{v^Tv} + 4\frac{(vv^T)(vv^T)}{(v^Tv)^2} \\ &= I - 4\frac{vv^T}{v^Tv} + 4\frac{v(v^Tv)v^T}{(v^Tv)^2} = I - 4\frac{vv^T}{v^Tv} + 4\frac{vv^T}{v^Tv} \\ &= I. \end{aligned}$$

4.2c) Beweisen Sie, dass $H^2 = I$ gilt.

Lösung: Eine direkte Rechnung unter Verwendung von 4.2a) zeigt

$$\begin{aligned} H^2 &= \Big(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\Big)\Big(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\Big) \\ &= I - 4\frac{vv^T}{v^Tv} + 4\frac{(vv^T)(vv^T)}{(v^Tv)^2} \\ &= I - 4\frac{vv^T}{v^Tv} + 4\frac{v(v^Tv)v^T}{(v^Tv)^2} \\ &= I - 4\frac{vv^T}{v^Tv} + 4\frac{vv^T}{v^Tv} \\ &= I. \end{aligned}$$

Alternativ folgt die Behauptung unmittelbar aus 4.2b), da

$$H^T = \Big(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\Big)^T = \Big(I - 2\frac{(vv^T)^T}{v^Tv}\Big) = \Big(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\Big)^T = H.$$

Aufgabe 4.3

Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Geben Sie die Matrizen Q und R einer QR-Zerlegung von A an.

Lösung: Gesucht ist eine orthogonale Matrix Q und eine Rechtsdreiecksmatrix R, so dass

$$A = QR.$$

Es gilt jedoch

$$A = AI.$$

und wir wissen, dass A orthogonal ist. Zudem ist die Einheitsmatrix I auch eine Rechtsdreiecksmatrix. Also definieren wir $Q := A$ und $R := I$ und haben damit eine QR-Zerlegung von A.

Aufgabe 4.4

Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kann entweder durch Drehung oder Spiegelung realisiert werden. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Berechnen Sie eine Drehmatrix Q_{21} und eine Spiegelungsmatrix H_1, so dass

$$Q_{21}A = R_1, \qquad H_1 A = R_2,$$

wobei R_1 und R_2 Rechtsdreiecksmatrizen sind. Geben Sie dann für $i = 1, 2$ eine orthogonale Matrix Q_i und eine Rechtsdreiecksmatrix R_i an, so dass $A = Q_i R_i$.

Lösung:

Q_{21}: Eine Drehmatrix $Q_{21} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kann man als

$$Q_{21} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

schreiben, wobei $\theta \in [0, 2\pi)$. Wir berechnen $Q_{21}A$ und da R_1 eine Rechtsdreiecksmatrix sein soll, folgt

$$-\sin(\theta) - \cos(\theta) = (R_1)_{21} = 0.$$

Wenn wir an den Einheitskreis denken, und wie der Sinus und Cosinus darin zu finden sind, haben wir $\theta = \frac{3\pi}{4}$ oder $\theta = \frac{7\pi}{4}$. Für $\theta = \frac{7\pi}{4}$ folgt

$$Q_{21}^{+} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgrund der Orthogonalität der Drehmatrizen gilt

$$Q_1^{+} = \left(Q_{21}^{+}\right)^T = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_1^{+} = Q_{21}^{+}A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Analog für $\theta = \frac{3\pi}{4}$ gilt

$$Q_{21}^{-} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -Q_{21}^{+}.$$

Deshalb ist

$$Q_1^{-} = \left(Q_{21}^{-}\right)^T = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad R_1^{-} = -R_1^{+} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

H_1: Die Matrix $H_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist die Householdermatrix (siehe Beispiel 2 auf Seite 32 vom Buch). Sei v der erste Spaltenvektor von A und $u = v \pm \|v\| e_1$, wobei $e_1 = [1, 0]^T$. Dann ist die Householdermatrix $H_1 = I_2 - 2\frac{uu^T}{\|u\|^2}$, wobei I_2 ist die Identitätsmatrix. Für $u = v - \|v\| e_1$ gilt

$$H_1^{-} = \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und deshalb

$$Q_2^{-} = \left(H_1^{-}\right)^T = H_1^{-}, \qquad R_2^{-} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Für $u = v + \|v\| e_1$ haben wir

$$H_1^+ = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -H_1^-$$

und deshalb

$$Q_2^+ = \left(H_1^+\right)^T = H_1^+, \qquad R_2^+ = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4.5

Bestimmen Sie, ob $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation $\cdot$ und der Addition $\oplus$, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei für zwei Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in V$ die Addition $x \oplus y$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in V.$$

Lösung: Wir müssen überprüfen, ob die Rechenregeln (A1)-(M3) aus der Vorlesung für die vorgegebenen Operationen gelten. Für $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in V = \mathbb{R}^3$ gilt

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}, \text{ aber } \quad y \oplus x = \begin{pmatrix} y_1 + x_2 \\ y_2 - x_1 \\ y_3 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Mit $x = (1, 0, 0)^T$, $y = (0, 1, 0)^T$ gilt also zum Beispiel

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ aber } \quad y \oplus x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt im Allgemeinen, dass $x \oplus y \neq y \oplus x$. Damit ist $V = (\mathbb{R}^3, \oplus, \cdot)$ sicher kein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Aufgabe 4.6

4.6a) Sei V die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$: $V = \left\{[x, y, 2x+y]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösung: V ist offensichtlich eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Wir müssen also noch die restlichen zwei Bedingungen für Unterräume in der Definition auf Seite 72 überprüfen.

Wir zeigen: $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$:

- Seien $a = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 2x_1 + y_1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 2x_2 + y_2 \end{bmatrix} \in V$. Es gilt

$$a + b = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 2x_3 + y_3 \end{bmatrix} \in V,$$

  wobei $x_3 = x_1 + x_2$, $y_3 = y_1 + y_2$.

- Sei a wie oben und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\alpha a = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ 2\alpha x_1 + \alpha y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 2x_4 + y_4 \end{bmatrix} \in V,$$

  wobei $x_4 = \alpha x_1$, $y_4 = \alpha y_1$.

Also ist V ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

4.6b) Ist die Menge $W = \{[x, 2x+1, x]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: W ist offensichtlich eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Wieder müssen wir noch die restlichen zwei Bedingungen für Unterräume in der Definition auf Seite 72 überprüfen.

Seien $a = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1+1 \\ x_1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2+1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in W$. Dann gilt

$$a + b = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2(x_1+x_2)+2 \\ x_1+x_2 \end{bmatrix} \notin W.$$

W ist also <u>kein</u> Unterraum des $\mathbb{R}^3$!

Bemerkung: Wenn wir zeigen wollen, dass etwas im Allgemeinen gilt, so müssen wir es für *alle* Fälle nachprüfen (wie hier bei Teilaufgabe 4.6a): wir prüfen es für *alle* $a, b \in V$ und für *alle* $\alpha \in \mathbb{R}$). Wenn wir hingegen zeigen wollen, dass etwas im Allgemeinen *nicht* gilt, so genügt es *ein* Gegenbeispiel zu finden. Teilaufgabe 4.6b) lässt sich somit einfacher lösen, indem man z. B. feststellt, dass zwar $v := [1,3,1]^T$ ein Element von W ist (mit $x = 1$), aber $v + v = [2,6,2]^T$ nicht in W ist (da kein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $v + v = [x, 2x+1, x]^T$).

Aufgabe 4.7

Wir betrachten den linearen Raum $V := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ über $\mathbb{C}$, d.h., den Raum aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Für alle $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir

$$c_j(x) := \cos(jx), \qquad s_j(x) := \sin(jx), \qquad e_j(x) := \exp(\mathrm{i}jx), \tag{4.7.1}$$

wobei hier $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit bezeichnet. Für $k \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig, sind die Unterräume

$$W_1 := \operatorname{span}\{e_{-k}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_k\} \qquad \text{und} \qquad W_2 := \operatorname{span}\{c_0, \dots, c_k, s_1, \dots, s_k\} \tag{4.7.2}$$

von V gegeben. Zeigen Sie, dass $W_1 = W_2$.

Hinweis: Es gilt $\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.

Lösung: Die Behauptung folgt, da $c_0 = e_0 \equiv 1$, und andererseits $e_j = c_j + \mathrm{i}s_j$, $e_{-j} = c_j - \mathrm{i}s_j$, sowie $c_j = (e_j + e_{-j})/2$, $s_j = (e_j - e_{-j})/(2\mathrm{i})$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$.

Aufgabe 4.8

(freiwillig!)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben durch

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{für } i = j \text{ oder } j = n, \\ a_{ij} = -1 & \text{für } i > j, \\ a_{ij} = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

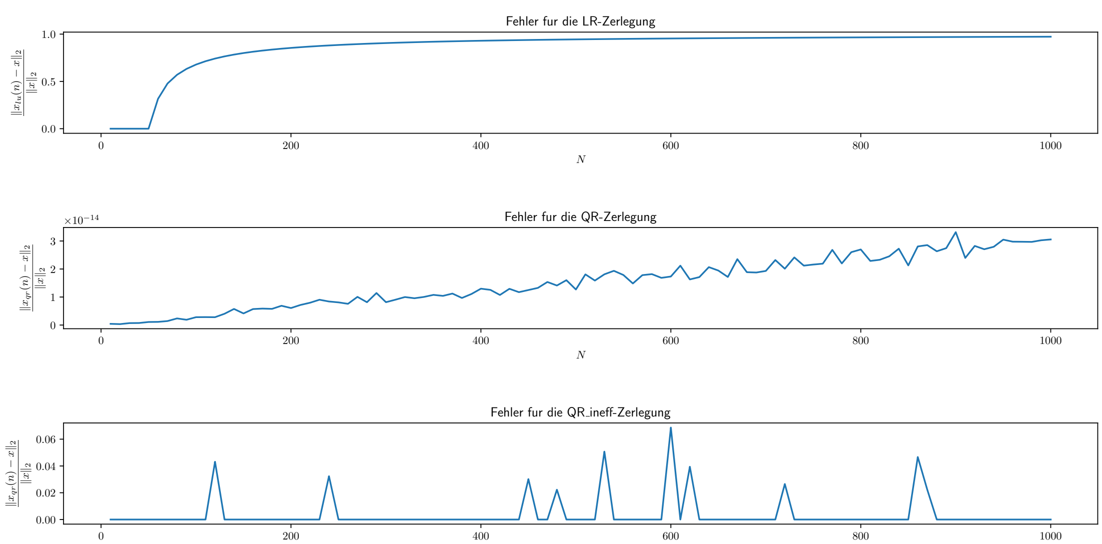
Für $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ durch $b = Ax$, wobei $x_i = (-1)^i$ für $i = 1, \ldots, n$. Lösen Sie mithilfe von PYTHON das Gleichungssystem $Ax = b$ für $n = 10, 20, .., 1000$ jeweils einmal mit der LR-Zerlegung und einmal mit der QR-Zerlegung. Ploten Sie die jeweiligen relativen Fehler der beiden Methoden in der Euklidischen Norm, $\frac{\|x_{lu}(n)-x\|_2}{\|x\|_2}$ und $\frac{\|x_{qr}(n)-x\|_2}{\|x\|_2}$, in einem Bild.

Hinweis: Vervollständigen Sie die gegebene Programmvorlage. Die Matrix A können Sie mithilfe des Befehls `numpy.tri` definieren. Definieren Sie die Methoden `lu(A)` und `qr(A)` mithilfe der Befehle `scipy.linalg.lu`, `scipy.linalg.qr` und `scipy.linalg.solve`, um die Systeme zu lösen. Für die Euklidische Norm $\|x\|_2$ nutzen Sie `numpy.linalg.norm(x)`. Um zwei Plots in einem Bild zu haben, betrachten Sie `matplotlib.pyplot.subplots(3,1)`.

Lösung:

```
import numpy as np
import scipy.linalg as la
import matplotlib.pyplot as plt

import warnings; warnings.filterwarnings(action='ignore')
#suppress warning "LinAlgWarning: Ill-conditioned
#matrix [...]: result may not be accurate."

#activate LaTex
plt.rcParams['text.usetex'] = True #

# functions for LU and QR.
def lu(A,b):
        P,L,U= ## <--- to be implemented
        return ## <--- to be implemented
def qr(A,b):
        Q,R= ## <--- to be implemented
        return ## <--- to be implemented
def qr_ineff(A,b): #inefficient version of the QR algorithm
        Q,R= ## <--- to be implemented
        return la.solve(R,la.solve(Q,b))


#initialization
N=np.arange(10, 1001, 10)
error_lu=np.zeros((100,1))
error_qu=np.zeros((100,1))
error_quineff=np.zeros((100,1))
```

```python
for i in N:
        A=## <--- to be implemented
        A=## <--- to be implemented
        for j in range(i):
                A[j,i-1]=## <--- to be implemented
        x=## <--- to be implemented
        x=np.array([x]).T
        b=A@x
        #Loesung mithilfe der LR-Zerlegung
        x_lu=lu(A,b)
        error_lu[(i-10)//10]=np.linalg.norm(x_lu-x)/np.linalg.norm(x)
        #Loesung mithilfe der QR-Zerlegung
        x_qu=qr(A,b)
        error_qu[(i-10)//10]=np.linalg.norm(x_qu-x)/np.linalg.norm(x)
        #Loesung mithilfe der QR_ineff-Zerlegung
        x_quineff=qr_ineff(A,b)
        error_quineff[(i-10)//10]=np.linalg.norm(x_quineff-x)/np.linalg.norm(x)

#plotting the graphs:
fig, graph= plt.subplots(3,1)
graph[0].plot(N, error_lu)
graph[0].set(xlabel=r'$N$',title="Fehler fuer die LR-Zerlegung")
graph[0].set_ylabel(r'$\displaystyle\frac{\|x_{lu}(n)-x\|_{2}}{\|x\|_{2}}$')
graph[1].plot(N, error_qu)
graph[1].set(xlabel=r'$N$',title=r'Fehler fuer die QR-Zerlegung')
graph[1].set_ylabel(r'$\displaystyle\frac{\|x_{qr}(n)-x\|_{2}}{\|x\|_{2}}$')
graph[2].plot(N, error_quineff)
graph[2].set(xlabel=r'$N$',title=r'Fehler fuer die QR_{ineff}-Zerlegung')
graph[2].set_ylabel(r'$\displaystyle\frac{\|x_{qr}(n)-x\|_{2}}{\|x\|_{2}}$')
fig.tight_layout()
plt.show()
```



Bemerkung: Normalerweise erzeugt die LR-Zerlegung keinen derart grossen Fehler. Allerdings gibt es einige Matrizen die einen solchen Fehler haben. Der Grund liegt in der Maschinenungenauigkeit des Computers. Ebenfalls sehen wir, dass QR_ineff deutlich grössere Fehler aufweist. Es lohnt sich also, bekannte Eigenschaften wie Orthogonalität der Matrix auszunutzen.

Aufgabe 4.9

Multiple Choice: Online abzugeben.

4.9a) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

(i) A, B, C und D sind Givens-Rotationen.

√ (ii) A, B und C sind Givens-Rotationen, nicht aber D.

√ (iii) Matrix A entspricht einer Drehung um ϕ im Uhrzeigersinn.

(iv) Matrix A entspricht einer Drehung um ϕ im Gegenuhrzeigersinn.

(v) Matrix B entspricht einer Drehung um ϕ um die $e^{(1)}$-Achse, wobei $e^{(1)} = (1, 0, 0)^T$.

√ (vi) Matrix C entspricht einer Drehung um ϕ um die $e^{(2)}$-Achse im Gegenuhrzeigersinn von der positiven $e^{(2)}$-Achse aus betrachtet.

(vii) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(2)}$-Ebene.

√ (viii) Matrix D ist eine Drehung um die $e^{(2)}$-Achse kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(3)}$-Ebene.

Eine allgemeine $n \times n$-Givens-Rotation sieht so aus: Für $1 \leq p < q \leq n$ definiert man die Givens-Rotationsmatrix $U_{pq}(\phi)$, indem man I_n an den vier Stellen i_{pp}, i_{pq}, i_{qp}, i_{qq} abändert wie folgt:

$$
\begin{array}{cc}
U_{pq}(\phi) = \begin{bmatrix}
1 & & 0 & & & 0 & & \\
& \ddots & \vdots & & & \vdots & & \\
0 & \cdots & \cos\phi & 0 & \cdots & \sin\phi & 0 & \cdots \\
& & 0 & 1 & & 0 & & \\
& & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\
0 & \cdots & -\sin\phi & 0 & \cdots & \cos\phi & 0 & \cdots \\
& & 0 & & & 0 & 1 & \\
& & \vdots & & & \vdots & & \ddots
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow p-\text{te Zeile} \\ \\ \\ \leftarrow q-\text{te Zeile} \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ p-\text{te Spalte} & q-\text{te Spalte} \end{array}$$

Um die geometrische Bedeutung der Abbildungen zu verstehen, betrachtet man ihre Wirkung auf die jeweiligen Einheitsvektoren.

A: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\cos\phi\\-\sin\phi\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\sin\phi\\\cos\phi\end{bmatrix}.$

Die Abbildung entspricht einer Drehung um 0 in $\mathbb{R}^2$, um den Winkel ϕ (im Uhrzeigersinn). Die Matrix ist eine Givens-Rotation.

B: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\cos\phi\\-\sin\phi\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\sin\phi\\\cos\phi\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$

Die Abbildung entspricht einer Drehung in $\mathbb{R}^3$ um die $e^{(3)}$-Achse (im Uhrzeigersinn, von der positiven Seite der $e^{(3)}$-Achse aus gesehen), um den Winkel ϕ. Die Matrix ist auch eine Givens-Rotation.

C: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\cos\phi\\0\\-\sin\phi\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\sin\phi\\0\\\cos\phi\end{bmatrix}.$

Die Abbildung entspricht einer Drehung in $\mathbb{R}^3$ um die $e^{(2)}$-Achse (im Gegenuhrzeigersinn, von der positiven Seite der $e^{(2)}$-Achse aus gesehen), um den Winkel ϕ. Die Matrix ist auch eine Givens-Rotation.

D: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\cos\phi\\0\\-\sin\phi\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\sin\phi\\0\\\cos\phi\end{bmatrix}.$

Die Abbildung entspricht einer Drehung in $\mathbb{R}^3$ um die $e^{(2)}$-Achse (im Gegenuhrzeigersinn, von der positiven Seite der $e^{(2)}$-Achse aus gesehen), um den Winkel ϕ, kombiniert mit einer Spiegelung an der $e^{(1)}$-$e^{(3)}$-Ebene. Die Matrix ist keine Givens-Rotation, sondern eine Givens-Matrix mal eine Spiegelungsmatrix. Die Spiegelungsmatrix ist hier:

$$S = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4.10

Multiple Choice: Online abzugeben.

4.10a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (i) Die Menge aller $n \times n$-Matrizen bildet einen reellen Vektorraum.

Richtig. Die Summe von zwei $n \times n$-Matrizen A und B, also $A + B$, ist wieder eine $n \times n$-Matrix. Ebenso verhält es sich bei der Multiplikation mit einem reellen Skalar λ. Wir müssen alle Rechenregeln in der Definition eines reellen Vektorraums (siehe Definition 2.1.0.1) überprüfen:

- (A1)+(A2): Wegen Satz 2.1 gilt

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \end{aligned}$$

  für alle $n \times n$-Matrizen A, B, C.
- (A3): Die Nullmatrix 0 der Grösse $n \times n$ ist in der Menge enthalten und es gilt:

$$A + 0 = A$$

  für alle $n \times n$-Matrizen A.
- (A4): Die Matrix $-A$ ist für alle $n \times n$-Matrizen A in der Menge enthalten und es gilt:

$$A + (-A) = 0.$$

- (M1): Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und sei A eine $n \times n$-Matrix.
  Die Matrix $\alpha(\beta A)$ ist genau dann gleich der Matrix $(\alpha\beta)A$, wenn alle Einträge übereinstimmen. Weil

$$(\alpha(\beta A))_{ij} = \alpha(\beta A)_{ij} = \alpha\beta(A)_{ij} = (\alpha\beta)(A)_{ij} = ((\alpha\beta)A)_{ij}$$

  für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, ist dies der Fall. Dabei haben wir insbesondere die Definition der Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar (siehe Seite 23) gebraucht.
- (M2): Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sowie A und B $n \times n$-Matrizen.
  Wiederum gilt, dass $(\alpha + \beta)A$ genau dann gleich $\alpha A + \beta A$ ist, wenn alle Einträge übereinstimmen. Weil

$$((\alpha + \beta)A)_{ij} = (\alpha + \beta)(A)_{ij} = \alpha(A)_{ij} + \beta(A)_{ij} = (\alpha A)_{ij} + (\beta A)_{ij} = (\alpha A + \beta A)_{ij}$$

  für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, ist dies erfüllt.
  Analog ist $\alpha(A + B)$ genau dann gleich $\alpha A + \alpha B$, wenn alle Einträge übereinstimmen. Weil

$$\begin{aligned} (\alpha(A + B))_{ij} &= \alpha(A + B)_{ij} = \alpha((A)_{ij} + (B)_{ij}) = \alpha(A)_{ij} + \alpha(B)_{ij} \\ &= (\alpha A)_{ij} + (\alpha B)_{ij} = (\alpha A + \alpha B)_{ij} \end{aligned}$$

  für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, gilt dies ebenso.
- (M3): Offensichtlich gilt $1 \cdot A = A$ für alle $n \times n$-Matrizen A.

Also bildet die Menge aller $n \times n$-Matrizen einen reellen Vektorraum.

(ii) Die Menge aller regulären $n \times n$-Matrizen bildet einen reellen Vektorraum.

Falsch. Die Summe von zwei regulären $n \times n$-Matrizen ist nicht immer eine reguläre Matrix. Zum Beispiel sind I_n und $-I_n$ zwei reguläre $n \times n$-Matrizen, aber ihre Summe ist die 0-Matrix, welche offensichtlich nicht regulär ist.

4.10b) Die Menge $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ bildet einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

(i) Richtig. $\surd$ (ii) Falsch.

Falsch. Nehmen wir zwei Elemente aus der Menge:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ und } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Addieren wir diese, ergibt das

$$u + v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (t_u + t_v) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

was nicht mehr in der Menge liegt.