

Serie 5

Aufgabe 5.1

Bestimmen Sie in den folgenden zwei Fällen, ob die Vektoren im \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^4 linear abhängig oder linear unabhängig sind. Geben Sie eine Begründung an.

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 5.2

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Finden Sie minimale Erzeugendensysteme im Kern und im Bild jeder dieser Matrizen.

Aufgabe 5.3

Gegeben sei der Vektorraum der stetigen Funktionen $V := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ über \mathbb{R} , das ist der Raum aller stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Betrachten wir die drei Funktionen

$$f_1(x) = \sin(x), \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = x \cos(x).$$

Alle drei Funktionen sind Elemente von V . Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear unabhängig in V sind.

Aufgabe 5.4 Spaltenraum und Kern einer Matrix

Geben Sie, sofern möglich, für die nachfolgenden Teilaufgaben jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ an, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt.

5.4a) Eine Basis des Spaltenraums von A ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ und eine Basis für $\text{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

5.4b) Eine Basis des Spaltenraums von A ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ und eine Basis für $\text{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

5.4c) Der Spaltenraum von A enthält die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und eine Basis für $\text{Kern}(A)$ ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

5.4d) Der Spaltenraum von A ist gleich dem Zeilenraum von A und $\text{Kern}(A)$ wird von den Vektoren $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ aufgespannt.

Aufgabe 5.5

Multiple Choice: Online abzugeben.

5.5a) Die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem vom \mathbb{R}^3 .

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

5.5b) In welchen Fällen bilden die Vektoren kein minimales Erzeugendensystem des \mathbb{R}^3 ?

(i) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 5.6

Multiple Choice: Online abzugeben.

5.6a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Seien $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann hat das homogene Gleichungssystem

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = 0$$

nichttriviale Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann muss gelten $k \leq n$.

(iii) Seien $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^n . Dann muss gelten $k \leq n$.

(iv) Seien $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von \mathbb{R}^n . Dann muss gelten $k \leq n$.

(v) Die Vektoren eines Erzeugendensystems können linear abhängig sein.

(vi) Falls die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ keine Basis von \mathbb{R}^n bilden, dann müssen sie linear abhängig sein.

5.6b) In welchen Fällen bilden die Vektoren ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 ?

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

5.6c) In welchen Fällen bilden die Vektoren eine Basis von \mathbb{R}^3 ?

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Abgabe:

Bis 28. Oktober, 10:00 Uhr im Vorraum vor dem HG G 53.2.