Dr. V. Gradinaru
F. Jin

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Serie 6

Aufgabe 6.1

6.1a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ und begründen Sie Ihre Antwort:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

6.1b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ c \\ b+c \end{bmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf. Wie hängt die Dimension dieses Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

Aufgabe 6.2

Sei $\mathcal{P}_4$ der Raum der Polynome mit Grad strikt kleiner als 4. Die Monome 1, x, x^2, x^3 bilden eine Basis von $\mathcal{P}_4$, aber dies ist natürlich nicht die einzige Basis.
Die sogenannten Legendre-Polynome sind wie folgt definiert:

$$P_0(x) = 1, \quad P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} (x^2-1)^i \text{ für } i > 0.$$

Zeigen Sie, dass P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von $\mathcal{P}_4$ bilden.

Aufgabe 6.3 Kern und Bild

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Bestimmen Sie Basen für $\mathrm{Kern}(A)$ und $\mathrm{Bild}(A)$.

Aufgabe 6.4 Koordinatentransformation

Gegeben seien die zwei Basen $\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

6.4a) Finden Sie die Basiswechselmatrix S, welche Koordinaten bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ auf die zugehörigen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ abbildet.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Tatsache, dass die Spalten der Basiswechselmatrix die Koordinaten der "alten Basis" $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich der "neuen Basis" $\mathcal{B}$ enthalten. Hier müssen Sie lineare Gleichungssysteme lösen, um diese Koordinaten zu bestimmen.

6.4b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 6.5

Multiple Choice: Online abzugeben.

Sei

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Eine Basis des Unterraums $\{x \mid Ax = 0\}$ ist gegeben durch…

(i) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(ii) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

(iii) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(iv) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$

Aufgabe 6.6 Kern/Bild/Dimensionssatz

Multiple Choice: Online abzugeben.

6.6a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(i) Es gibt Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ so, dass die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : x^\top (ab^\top) x = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

(ii) Für jeden Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ gilt $\dim \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = 0\} = n - 1$.

(iii) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt $\quad A = 0 \Leftrightarrow A^T A = \mathbf{0}$.

(iv) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\quad \mathrm{Kern}(A) \cap \mathrm{Bild}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

Abgabe:

In der Woche vom 4. November, 10:00 Uhr im Vorraum vor dem HG G 53.2.