Dr. V. Gradinaru
F. Jin

Herbstsemester 2022

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 6

Aufgabe 6.1

6.1a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ und begründen Sie Ihre Antwort:

$$\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}.$$

Lösung: Eine Basis besteht aus erzeugenden und linear unabhängigen Vektoren. Es muss also gelten: $r = k = n = 3$.

$$\begin{array}{r}-2\\ \\ 1\end{array}\begin{array}{|rrrrrr|}\hline -2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 5\\ \hline\end{array} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{r}\\ \\ -1\end{array}\begin{array}{|rrrrrr|}\hline 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 5\\ \hline\end{array}$$

$$\overset{(E)_2}{\rightarrow} \begin{array}{|rrrrrr|}\hline 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 8\\ \hline\end{array}$$

Wir können also z. B. die Pivot-Vektoren als Basis wählen:

$$\left\{ \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix} \right\}.$$

Wir können aber statt des 4. Vektors $\begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}$ auch den 6. Vektor $\begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}$ nehmen, wie man durch Vertauschen der entsprechenden Spalten im Gaussschema leicht sieht. Ebenso können wir statt des 2. Vektors $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ den 5. Vektor $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ oder statt des 1. Vektors $\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$ den 3. Vektor $\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$ nehmen.

Als Basis könnte man auch eine andere Kombination, wie zum Beispiel

$$\left\{ \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix} \right\},$$

wählen, aber die Tatsache, dass diese Auswahl eine Basis bildet, sieht man anhand vom Schema nicht.

6.1b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ c \\ b+c \end{bmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf. Wie hängt die Dimension dieses Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

Lösung: Sei U der von den drei Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Die Dimension von U ist gleich der Anzahl Vektoren, die in U eine Basis bilden. Schreibe nun

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ a & b & c \\ 1+a & 2 & b+c \end{bmatrix}.$$

Aus der Vorlesung (im Buch auf Seite 83) wissen wir, dass gilt:
Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren von A *ist gleich* $r = \operatorname{Rang} A$.
Eine Basis von U kann also höchstens aus r Vektoren bestehen (sonst sind sie nicht mehr linear unabhängig und bilden keine Basis). Es gilt also $d := \dim U \leq r$.
Wegen Satz 4.3 i) aus dem Buch wissen wir zudem, dass mehr als d Vektoren linear abhängig in U sind. Es folgt also, dass $\dim U = \operatorname{Rang} A$, somit können wir die Dimension von U mit dem Gaussverfahren berechnen.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & c \\ a & b & c \\ 1+a & 2 & b+c \end{array}}$$

Fall $a = b = 0$:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c \\ 1 & 2 & c \end{array}} \overset{(c \neq 0)}{\rightarrow} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & c \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

- falls $c = 0$, gilt $d = r = 1$,
- falls $c \neq 0$, gilt $d = r = 2$.

Fall $a = 0, b \neq 0$:

- für $c = 0$ gilt

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & b \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}} \text{ also } d = r = 2,$$

- für $c \neq 0$ gilt

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & b+c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \end{array}} \text{ also } d = r = 3.$$

Fall $a \neq 0$:

$$\begin{array}{|ccc|}\hline a & 0 & c \\ a & b & c \\ 1+a & 2 & b+c \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{|ccc|}\hline a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & b-\frac{c}{a} \\ \hline \end{array} \overset{(E)_2}{\rightarrow} \begin{array}{|ccc|}\hline a & 0 & -c \\ 0 & 2 & b-\frac{c}{a} \\ 0 & 0 & \frac{b(c-ab)}{2a} \\ \hline \end{array}$$

- falls $\frac{b(c-ab)}{2a} = 0$ (also falls $b = 0$ oder $c = ab$): $d = r = 2$,
- falls $\frac{b(c-ab)}{2a} \neq 0 : d = r = 3$.

Aufgabe 6.2

Sei $\mathcal{P}_4$ der Raum der Polynome mit Grad strikt kleiner als 4. Die Monome 1, x, x^2, x^3 bilden eine Basis von $\mathcal{P}_4$, aber dies ist natürlich nicht die einzige Basis.
Die sogenannten Legendre-Polynome sind wie folgt definiert:

$$P_0(x) = 1, \quad P_i(x) = \frac{1}{2^i i!}\frac{d^i}{dx^i}(x^2-1)^i \text{ für } i > 0.$$

Zeigen Sie, dass P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von $\mathcal{P}_4$ bilden.

Lösung: Wichtig für uns ist folgende Tatsache, die aufgrund der Isomorphie jedes reellen, n-dimensionalen Vektorraums zum $\mathbb{R}^n$ gilt (siehe Seite 82 im Buch):
Sei V ein reeller, n-dimensionaler Vektorraum. Weiter sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Dann gilt: Eine Liste von Vektoren aus V ist genau dann eine Basis von V, wenn die entsprechenden Koordinatenvektoren bezüglich $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Wir bestimmen die Koordinatenvektoren der Legendre-Polynome bezüglich der Monombasis und überprüfen, dass diese eine Basis bilden. Wir beginnen mit dem Ausführen der Differentiation:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Jetzt bestimmen wir die Koordinaten $p^{(i)} \in \mathbb{R}^4$ des Vektors P_i für $i = 0, \dots, 3$ bezüglich der Monombasis $a^{(0)} = 1$, $a^{(1)} = x$, $a^{(2)} = x^2$, $a^{(3)} = x^3$.

Wir sehen, dass

$$\begin{aligned} P_0 = 1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ P_1 = x &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot x + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x &= 0 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot x + 0 \cdot x^2 + \frac{5}{2} \cdot x^3. \end{aligned}$$

Damit haben wir die folgenden Koordinatenvektoren:

$$p^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, dass die Koordinatenvektoren linear unabhängig sind. Anwenden des Gaussverfahrens ist hier einfach: Wir landen direkt beim Endschema

1	0	$-\frac{1}{2}$	0
0	1	0	$-\frac{3}{2}$
0	0	$\frac{3}{2}$	0
0	0	0	$\frac{5}{2}$

Somit sind die Koordinatenvektoren linear unabhängig. Damit ist der Rang gleich 4. Wir können somit folgern, dass die Koordinatenvektoren $p^{(0)}$, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden und damit sehen wir, dass die Legendre-Polynome P_0, P_1, P_2, P_3 eine Basis von $\mathcal{P}_4$ bilden.

Aufgabe 6.3 Kern und Bild

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Bestimmen Sie Basen für $\mathrm{Kern}(A)$ und $\mathrm{Bild}(A)$.

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass für eine $m \times n$-Matrix C gilt:

i) $b \in \mathrm{Bild}(C) \;\Leftrightarrow\; Cx = b$ besitzt mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $x \in \mathrm{Kern}(C) \;\Leftrightarrow\; x$ löst $Cx = 0$.

iii) $\dim \mathrm{Bild}(C) + \dim \mathrm{Kern}(C) = r + (n - r) = n$, wobei $r = \mathrm{Rang}\, C$.

iv) $\mathrm{Bild}(C) = \mathrm{span}\{c^{(1)}, \ldots, c^{(n)}\}$, wobei $c^{(i)}$ die i-te Spalte von C bezeichnet.

Löse also zunächst $Ax = 0$ mit Gausselimination:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Wähle } x_4 = \alpha \in \mathbb{R},\ x_3 = \beta \in \mathbb{R},$$

$$2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{3}{2}(x_4 - x_3) = \frac{3}{2}(\alpha - \beta),$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{4}(\beta - 3\alpha)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Somit ist

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$. Aus iii) folgt ausserdem, dass $\dim \mathrm{Bild}(A) = 4 - \dim \mathrm{Kern}(A) = 2$. Wegen iv) können wir also zwei linear unabhängige Spaltenvektoren von A als Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ wählen. Aus dem obigen Gauss-Schema sieht man, dass zum Beispiel

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linear unabhängig sind. Somit ist

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

Aufgabe 6.4 Koordinatentransformation

Gegeben seien die zwei Basen $\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

6.4a) Finden Sie die Basiswechselmatrix S, welche Koordinaten bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ auf die zugehörigen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ abbildet.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Tatsache, dass die Spalten der Basiswechselmatrix die Koordinaten der "alten Basis" $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich der "neuen Basis" $\mathcal{B}$ enthalten. Hier müssen Sie lineare Gleichungssysteme lösen, um diese Koordinaten zu bestimmen.

Lösung: Wir definieren zuerst die beiden Matrizen $B, \tilde{B}$, in deren Spalten die Basisvektoren von $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ stehen.

Dann folgen wir der Definition der Basiswechselmatrix S, in welcher S durch das Gleichungssystem

$$\tilde{b}^j = \sum_{i=1}^{3} S_{i,j} b^i \tag{6.4.1}$$

bestimmt ist. Wir schreiben (6.4.1) in Matrixnotation:

$$BS = \tilde{B}. \tag{6.4.2}$$

In den Spalten von S stehen die Koordinaten der "alten Basis" $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich der "neuen Basis" $\mathcal{B}$. Lösung von (6.4.2) durch Gausselimination liefert für die Basiswechselmatrix S:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{5} & \frac{12}{5} \\ 6 & \frac{43}{5} & \frac{32}{5} \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Koordinaten $\tilde{c}$ bezüglich der "alten Basis" $\tilde{\mathcal{B}}$ werden durch Multiplikation mit S in Koordinaten c bezüglich der "neuen Basis" $\mathcal{B}$ überführt. Dies lässt sich durch folgende Rechnung leicht nachvollziehen: Multiplikation des Koordinatenvektors $\tilde{c}$ von links mit (6.4.2) ergibt

$$\tilde{B}\tilde{c} = BS\tilde{c}.$$

Da $\tilde{B}\tilde{c}$ und Bc denselben Punkt im $\mathbb{R}^3$ beschreiben sollen, gilt natürlich $\tilde{B}\tilde{c} = Bc$. Somit muss $c = S\tilde{c}$ sein.

6.4b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Lösung: Es gilt

$$v = \tilde{B}\tilde{c} = \tilde{B}\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ sind gegeben durch $c = S\tilde{c} = \begin{bmatrix} \frac{31}{5} \\ \frac{191}{5} \\ -18 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 6.5

Multiple Choice: Online abzugeben.

Sei

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Eine Basis des Unterraums $\{x \mid Ax = 0\}$ ist gegeben durch…

√ (i) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(ii) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(iii) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(iv) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Mit dem Gaussverfahren erhält man aus der Matrix A eine Zeilenstufenform wie die folgende:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daher sind die Lösungen des Gleichungssystems $Ax = 0$ durch

$$x_2 = -x_3 - 2x_4$$
$$x_1 = \frac{1}{2}((x_3 + 2x_4) + x_3 - 2x_4) = x_3$$

gegeben, wobei x_3 und x_4 freie Parameter sind. Der Kern von A hat somit die Dimension 2.

Die Vektoren $(1, -1, 1, 0)^\top, (1, -3, 1, 1)^\top$ sind Lösungen von $Ax = 0$ und linear unabhängig, da der zweite kein Vielfaches vom ersten ist. Sie bilden daher eine Basis vom Kern von A.

Die zweite Antwort ist falsch, weil jede Basis vom Kern von A genau zwei Elemente hat.

Die dritte Antwort ist falsch, weil Vektoren im $\mathbb{R}^3$ nicht im Kern von A liegen können, sondern nur Vektoren im $\mathbb{R}^4$.

Die vierte Antwort ist falsch, weil $(1, 0, -1, 0)^\top$ keine Lösung von $Ax = 0$ ist.

Aufgabe 6.6 Kern/Bild/Dimensionssatz

Multiple Choice: Online abzugeben.

6.6a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

√ (i) Es gibt Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ so, dass die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : x^\top(ab^\top)x = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

Richtig. Diese Aussage stimmt sogar für alle $a = b \in \mathbb{R}^n$. Wir bemerken, dass dann die Bedingung $x^\top(aa^\top)x = 0$ äquivalent ist zu

$$0 = x^\top(aa^\top)x = (x^\top a)(a^\top x) = (x^\top a)^2 \iff x^\top a = 0.$$

Somit ist die beschriebene Menge das orthogonale Komplement von a, und damit ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

(ii) Für jeden Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ gilt $\dim\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = 0\} = n - 1$.

Falsch. Für $a = 0$ ist $a^\top x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, somit ist $\dim\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = 0\} = n$. Die Aussage wäre richtig für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

√ (iii) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt $\quad A = 0 \Leftrightarrow A^T A = \mathbf{0}$.

Richtig. Die Implikation "⇒" ist offensichtlich. Für die Rückimplikation sei nun $A^\top A = \mathbf{0}$. Sei $A = (a_{ij})$. Für die Diagonaleinträge $(A^\top A)_{jj},\ j = 1, \ldots, n$ gilt dann

$$0 = (A^\top A)_{jj} = a_{1j}^2 + \cdots + a_{mj}^2.$$

Damit ist $a_{1j} = \cdots = a_{mj} = 0$. Da dies für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt, ist $a_{ij} = 0$ für alle Einträge von A, und damit $A = \mathbf{0}$.

(iv) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\quad \mathrm{Kern}(A) \cap \mathrm{Bild}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

Falsch. Sei zum Beispiel $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

im Bild von A, und wegen $Ax = 0$ auch im Kern von A.

Aus dem Fundamentalsatz der linearen Algebra würde $\mathrm{Kern}(A) \cap \mathrm{Bild}(A^\top) = \mathrm{Bild}(A) \cap \mathrm{Kern}(A^\top) = \{\mathbf{0}\}$ folgen, aber dies lässt keine Aussage über $\mathrm{Kern}(A) \cap \mathrm{Bild}(A)$ zu.