

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Serie 7

Aufgabe 7.1 Matrixdarstellung einer linearen Polynomabbildung

Seien $\mathcal{G}_3 = \text{span}\{1, t^2, t^4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \text{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume. Betrachten Sie die folgende Abbildung \mathcal{A} von \mathcal{G}_3 nach \mathcal{U}_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \mathcal{G}_3 &\longrightarrow \mathcal{U}_2 \\ x &\longmapsto tx'' \end{aligned}$$

7.1a) Zeigen Sie, dass \mathcal{A} eine lineare Abbildung ist.

7.1b) Durch welche Matrix A wird \mathcal{A} beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

7.1c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von \mathcal{G}_3 beziehungsweise \mathcal{U}_2 sind, wobei $p_1(t) = 1 + t^2$, $p_2(t) = 1 - t^2$, $p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$, $q_1(t) = t$ und $q_2(t) = 3t + 2t^3$.

7.1d) Welches ist die neue Matrix B , die \mathcal{A} nach diesem Basiswechsel (die neuen Basen sind in Teilaufgabe 7.1c) gegeben) beschreibt?

Aufgabe 7.2

Die drei linearen längenerhaltenden Selbstabbildungen F_1, F_2 und F_3 des \mathbb{R}^3 sind wie folgt definiert:

F_1 ist eine Spiegelung an der Ebene $x_1 = x_2$.

F_2 ist eine 45° -Drehung um die x_1 -Achse.

F_3 ist eine 30° -Drehung um die x_2 -Achse.

7.2a) Finden Sie die Matrixdarstellungen der linearen Abbildungen F_1, F_2 and F_3 bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^3 .

7.2b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen der hintereinandergeschalteten Abbildungen $F_2 \circ F_1$ und $F_3 \circ F_2$.

Aufgabe 7.3

Seien X und Y zwei lineare Räume und $F: X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

7.3a) F ist injektiv, dann und nur dann, wenn $\text{Ker}(F) = \{0\}$.

7.3b) Falls X und Y endlichdimensional sind, dann ist F bijektiv dann und nur dann wenn die Abbildungsmatrix von F (zu Basen in X und Y) eine invertierbare Matrix ist.

Aufgabe 7.4

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $D = \text{diag}(4, \frac{1}{9})$. Wir definieren $(x, y) := x^\top D y$ für $x, y \in V$.

7.4a) Zeigen Sie, dass (x, y) in V ein Skalarprodukt definiert.

7.4b) Wie sieht die durch (x, y) induzierte Norm $\|x\|$ aus?

7.4c) Berechnen Sie die Norm von $x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$.

7.4d) Geben Sie den algebraischen Ausdruck und skizzieren Sie den Ball mit Radius 1 bezüglich dieser Norm.

7.4e) Finden Sie einen normierten Vektor, der orthogonal auf $x = [-1/2, 3]^\top$ steht.

Aufgabe 7.5

Multiple Choice: Online abzugeben.

7.5a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear:

(i) $\mathcal{F} : x \mapsto ax + b$ mit $x, a, b \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax + b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$

(iii) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(iv) $\mathcal{F} : x \mapsto x^2 + 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$

(v) $\mathcal{F} : x \mapsto \exp(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

(vi) \mathcal{F} nimmt eine Funktion f aus der Menge der stetigen Funktion von $[0, 1]$ nach \mathbb{R} , notiert als $\mathcal{C}([0, 1])$, und gibt die Funktion $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ in $\mathcal{C}([0, 1])$ zurück.

7.5b) Wir betrachten die Ebene E in \mathbb{R}^3 , gegeben durch $x_2 = x_3$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ senkrecht auf E projiziert. Welche Aussagen treffen zu?

(i) Die Matrix A , welche \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(ii) Die Matrix A , welche \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7.5c) Gegeben ist ein Autokonstruktionsroboter, welcher immer die gleiche Drehung mit einem Stoss durchführt, um ein Element in die Karosserie einzufügen. Die dazugehörige lineare Abbildung ist $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedes $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ auf

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

abbildet. Nun, der Roboter operiert nicht bezüglich unserer Standardbasis, sondern bezüglich der Basis $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Welche Aussagen treffen zu?

(i) Die Matrix A , welche \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\sqrt{2} \begin{bmatrix} -6.5 & -65 & -12.5 \\ 1.5 & 14 & 2.5 \\ -3.5 & -32 & -5.5 \end{bmatrix}$.

(ii) Die Matrix A , welche \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\sqrt{2} \begin{bmatrix} -16.5 & -7.5 & 17.5 \\ -14.5 & -5.5 & 14.5 \\ -23 & -10 & 24 \end{bmatrix}$.

Abgabe:

Bis 11. November, 10:00 Uhr im Vorraum vor dem HG G 53.2.