Dr. V. Gradinaru
F. Jin

Herbstsemester 2022

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 7

Aufgabe 7.1 Matrixdarstellung einer linearen Polynomabbildung

Seien $\mathcal{G}_3 = \operatorname{span}\{1, t^2, t^4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \operatorname{span}\{t, t^3\}$ zwei Vektorräume. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{G}_3$ nach $\mathcal{U}_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad \mathcal{G}_3 &\longrightarrow \mathcal{U}_2 \\ x &\longmapsto tx'' \end{aligned}$$

7.1a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

Lösung: Zunächst ist $\mathcal{A}$ wohldefiniert in den angegebenen Räumen, da $t(1)'' = 0 \in \mathcal{U}_2$, $t(t^2)'' = 2t \in \mathcal{U}_2$ und $t(t^4)'' = 12t^3 \in \mathcal{U}_2$. Ausserdem gilt für alle $x, y \in \mathcal{G}_3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dass

$$\mathcal{A}(x + \alpha y) = t(x'' + \alpha y'') = tx'' + \alpha t y'' = \mathcal{A}x + \alpha \mathcal{A}y.$$

Somit ist $\mathcal{A}$ linear.

7.1b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

Lösung: Es gilt

$$\mathcal{A}1 = 0, \quad \mathcal{A}t^2 = 2t, \quad \mathcal{A}t^4 = 12t^3$$

und somit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

7.1c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ beziehungsweise $\mathcal{U}_2$ sind, wobei $p_1(t) = 1 + t^2$, $p_2(t) = 1 - t^2$, $p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$, $q_1(t) = t$ und $q_2(t) = 3t + 2t^3$.

Lösung: Es gilt $1 = (p_1 + p_2)/2$, $t^2 = (p_1 - p_2)/2$ und $t^4 = p_3 - 1 - t^2 = p_3 - (p_1 + p_2)/2 - (p_1 - p_2)/2$, sowie $t = q_1$, $t^3 = (q_2 - 2q_1)/3$. Somit ist $\operatorname{span}\{p_1, p_2, p_3\} = \operatorname{span}\{1, t^2, t^4\} = \mathcal{G}_3$ und $\operatorname{span}\{q_1, q_2\} = \operatorname{span}\{t, t^3\} = \mathcal{U}_2$. Da $\dim \mathcal{G}_3 = 3$ und $\dim \mathcal{U}_2 = 2$, muss es sich um Basen handeln. Um zu zeigen, dass $\dim \mathcal{G}_3 = 3$, ist es hinreichend, lineare Unabhängigkeit von 1, t^2 und t^4 nachzuweisen. Nehmen wir also an, dass $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $\alpha 1 + \beta t^2 + \gamma t^4 = 0 \in \mathcal{G}_3$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Indem wir $t = 0$ setzen, erhalten wir $\alpha = 0$, das heisst, $t^2(\beta + t^2\gamma) = 0, \forall\, t \in \mathbb{R}$. Dies impliziert $\beta = -\gamma t^2$ für *alle* $t \neq 0$, was ein Widerspruch ist. Analog zeigt man $\dim \mathcal{U}_2 = 2$.

7.1d) Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{A}$ nach diesem Basiswechsel (die neuen Basen sind in Teilaufgabe **??** gegeben) beschreibt?

Lösung: Die (neue) Basis q_1, q_2 schreibt sich in der (alten) Basis t, t^3 mittels der Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

und analog beschreibt

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

die (neue) Basis p_1, p_2, p_3 mittels (der alten) 1, t^2, t^4. Wir erhalten für die Darstellung B von $\mathcal{A}$ in den neuen Basen

$$B = C^{-1}AD = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7.2

Die drei linearen längenerhaltenden Selbstabbildungen F_1, F_2 und F_3 des $\mathbb{R}^3$ sind wie folgt definiert:

F_1 ist eine Spiegelung an der Ebene $x_1 = x_2$.
F_2 ist eine $45°$-Drehung um die x_1-Achse.
F_3 ist eine $30°$-Drehung um die x_2-Achse.

7.2a) Finden Sie die Matrixdarstellungen der linearen Abbildungen $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2$ and F_3 bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Es seien F_1, F_2 und F_3 die Matrixdarstellungen der linearen Abbildungen F_1, F_2 und F_3. Zuerst bestimmen wir F_1. Sei $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = F_1(x, y, z)$. Wir verwenden folgende zwei Eigenschaften:

- Die Summe des Vektors und des gespielten Vektors liegt in der Spiegelungsebene,

$$\frac{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + (x, y, z)}{2} \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 = x_2\},$$

- die Differenz ist orthogonal zur Spiegelungsebene,

$$(x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z}) = \lambda(1, -1, 0).$$

Die erste Bedingung impliziert

$$\frac{x + \bar{x}}{2} - \frac{y + \bar{y}}{2} = 0$$

und aus der zweiten folgt

$$\frac{x - \bar{x}}{1} = \frac{y - \bar{y}}{-1}, \quad z = \bar{z}.$$

Das lineare Gleichungssystem oben (für $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$) ergibt $\bar{x} = y$, $\bar{y} = x$ und $\bar{z} = z$. Also gilt für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dass $F_1(x, y, z) = (y, x, z)$, i.e.

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jetzt bestimmen wir F_2. Es gilt

$$\begin{aligned} (1,0,0) &\mapsto (1,0,0), \\ (0,1,0) &\mapsto \left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ (0,0,1) &\mapsto \left(0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Also

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Zuletzt finden wir noch F_3. Es gilt

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &\mapsto \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right), \\
(0,1,0) &\mapsto (0,1,0), \\
(0,0,1) &\mapsto \left(-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Also

$$F_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

7.2b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen der hintereinandergeschalteten Abbildungen $\mathsf{F}_2 \circ \mathsf{F}_1$ und $\mathsf{F}_3 \circ \mathsf{F}_2$.

Lösung: Es gilt

$$F_2 \circ F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

und

$$F_3 \circ F_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7.3

Seien X und Y zwei lineare Räume und $F:\ X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

7.3a) F ist injektiv, dann und nur dann, wenn $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$.

Lösung: Wenn F injektiv ist, gilt per Definition für alle $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$, dass auch $F(x) \neq F(x')$. Da $F(0) = 0$, muss also für alle $x' \neq 0$ gelten: $F(x') \neq 0$. Somit ist $\mathrm{Ker}(F) = \{x' \in X \mid F(x') = 0\} = \{0\}$. Dies zeigt:

$$F \text{ injektiv} \implies \mathrm{Ker}(F) = \{0\}.$$

Ist andererseits $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$, und gilt $F(x) = F(x')$ für zwei Elemente $x, x' \in X$, dann gilt aufgrund der Linearität

$$0 = F(x) - F(x') = F(x - x').$$

D.h. $x - x' \in \mathrm{Ker}(F)$. Da $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$, folgt $x - x' = 0$, also $x = x'$. Also haben wir gezeigt: Wenn $F(x) = F(x')$, dann muss $x = x'$ sein. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass für alle $x \neq x'$ auch $F(x) \neq F(x')$ gelten muss. Somit is F injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$. Dies zeigt:

$$\mathrm{Ker}(F) = \{0\} \implies F \text{ injektiv}.$$

7.3b) Falls X und Y endlichdimensional sind, dann ist F bijektiv dann und nur dann wenn die Abbildungsmatrix von F (zu Basen in X und Y) eine invertierbare Matrix ist.

Lösung: Sei A die Abbildungsmatrix von F (zu Basen $\mathcal{B}$ in X und $\mathcal{C}$ in Y), gemäss dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_{\mathcal{B}}"'] & Y \arrow[d, "k_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Wir müssen die Folgenden zwei Aussagen beweisen:

1. Wenn A invertierbar ist, dann ist F bijektiv.
2. Wenn F bijektiv ist, dann ist A invertierbar.

Wir zeigen zuerst die erste Aussage: Wenn A invertierbar ist, dann können wir $G : Y \to X$ als die lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix A^{-1} definieren, gemäss dem folgenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "G"] \arrow[d, "k_{\mathcal{C}}"] & X \arrow[d, "k_{\mathcal{B}}"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A^{-1}"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} G \circ F &= (k_{\mathcal{B}}^{-1} \circ A^{-1} \circ k_{\mathcal{C}}) \circ (k_{\mathcal{C}}^{-1} \circ A \circ k_{\mathcal{B}}) \\ &= k_{\mathcal{B}}^{-1} \circ A^{-1} \circ k_{\mathcal{C}} \circ k_{\mathcal{C}}^{-1} \circ A \circ k_{\mathcal{B}} \\ &= k_{\mathcal{B}}^{-1} \circ A^{-1} \circ A \circ k_{\mathcal{B}} \\ &= k_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \circ k_{\mathcal{B}} \\ &= \mathrm{Id}, \end{aligned}$$

i.e. $G \circ F = \mathrm{Id} : X \to X$ ist die Identitätsabbildung, $G(F(x)) = x$, für alle $x \in X$. Umgekehrt ist aber auch

$$\begin{aligned} F \circ G &= (k_{\mathcal{C}}^{-1} \circ A \circ k_{\mathcal{B}}) \circ (k_{\mathcal{B}}^{-1} \circ A^{-1} \circ k_{\mathcal{C}}) \\ &= k_{\mathcal{C}}^{-1} \circ A \circ k_{\mathcal{B}} \circ k_{\mathcal{B}}^{-1} \circ A^{-1} \circ k_{\mathcal{C}} \\ &= k_{\mathcal{C}}^{-1} \circ A \circ A^{-1} \circ k_{\mathcal{C}} \\ &= k_{\mathcal{C}}^{-1} \circ k_{\mathcal{C}} \\ &= \mathrm{Id}, \end{aligned}$$

i.e. $F \circ G = \mathrm{Id} : Y \to Y$ ist die Identitätsabbildung, $F(G(y)) = y$, für alle $y \in Y$.

Damit haben wir gezeigt, dass für $G : Y \to X$ sowohl $F \circ G = \mathrm{Id}$, als auch $G \circ F = \mathrm{Id}$ gilt. Somit ist $G = F^{-1}$ die Inverse von F. Da F eine Inverse besitzt, ist F bijektiv. Dies ist die erste Aussage.

Wir zeigen nun die zweite Aussage: Wir nehmen also an, dass $F : X \to Y$ bijektiv ist. Dann existiert die Inverse $F^{-1} : Y \to X$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass F^{-1} eine lineare Abbildung ist. Sei B die Abbildungsmatrix von F^{-1}:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F^{-1}"] \arrow[d, "k_{\mathcal{C}}"] & X \arrow[d, "k_{\mathcal{B}}"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Dann gilt für die Matrizen A und B (als lineare Abbildungen betrachtet)

$$\begin{aligned} A \circ B &= (k_{\mathcal{C}} \circ F \circ k_{\mathcal{B}}^{-1}) \circ (k_{\mathcal{B}} \circ F^{-1} \circ k_{\mathcal{C}}^{-1}) \\ &= k_{\mathcal{C}} \circ F \circ k_{\mathcal{B}}^{-1} \circ k_{\mathcal{B}} \circ F^{-1} \circ k_{\mathcal{C}}^{-1} \\ &= k_{\mathcal{C}} \circ F \circ F^{-1} \circ k_{\mathcal{C}}^{-1} \\ &= k_{\mathcal{C}} \circ k_{\mathcal{C}}^{-1} \\ &= \mathrm{Id}, \end{aligned}$$

i.e. $A \circ B = \mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die Identitätsabbildung, oder äquivalent dazu: $A \cdot B = \mathbf{1}_{n\times n}$ ist die Einheitsmatrix. Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} B \circ A &= (k_{\mathcal{B}} \circ F^{-1} \circ k_{\mathcal{C}}^{-1}) \circ (k_{\mathcal{C}} \circ F \circ k_{\mathcal{B}}^{-1}) \\ &= k_{\mathcal{B}} \circ F^{-1} \circ k_{\mathcal{C}}^{-1} \circ k_{\mathcal{C}} \circ F \circ k_{\mathcal{B}}^{-1} \\ &= k_{\mathcal{B}} \circ F^{-1} \circ F \circ k_{\mathcal{B}}^{-1} \\ &= k_{\mathcal{B}} \circ k_{\mathcal{B}}^{-1} \\ &= \mathrm{Id}, \end{aligned}$$

i.e. $B \circ A = \mathrm{Id} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ist die Identitätsabbildung, oder äquivalent dazu: $B \cdot A = \mathbf{1}_{m\times m}$ ist die Einheitsmatrix. Somit haben wir gezeigt, dass

$$A \cdot B = \mathbf{1}_{n\times n}, \quad B \cdot A = \mathbf{1}_{m\times m},$$

Einheitsmatrizen sind. Dies impliziert, dass $n = m$, und dass $B = A^{-1}$ die Inverse von A ist. Somit ist auch die zweite Aussage bewiesen.

Aufgabe 7.4

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $D = \mathrm{diag}(4, \frac{1}{9})$. Wir definieren $(x, y) := x^\top D y$ für $x, y \in V$.

7.4a) Zeigen Sie, dass (x, y) in V ein Skalarprodukt definiert.

Lösung: Zuerst bemerken wir, dass $D = \mathrm{diag}(4, \frac{1}{9}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$. Für $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ und $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ gilt:

$$(x, y) := x^\top D y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4y_1 \\ \frac{1}{9} y_2 \end{bmatrix} = 4x_1 y_1 + \frac{1}{9} x_2 y_2.$$

Wir kontrollieren die Eigenschaften (S1)-(S3) von einem Skalarprodukt (siehe Buch, Seite 92).

(S1) (i) Sei $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$:

$$(x, y + z) = x^\top D(y + z) = x^\top Dy + x^\top Dz = (x, y) + (x, z), \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(x, \alpha y) = x^\top D(\alpha y) = \alpha x^\top Dy = \alpha(x, y).$$

(x, y) ist also linear im zweiten Faktor.

(S2) (x, y) ist symmetrisch, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(x, y) = x^\top Dy \overset{x^\top Dy \in \mathbb{R}}{=} (x^\top Dy)^\top = y^\top D^\top x = y^\top Dx = (y, x).$$

Bemerkung: Für D nicht symmetrisch ist $(x, y) = x^\top Dy$ nicht mehr symmetrisch, also kein Skalarprodukt.

(S3) (x, y) ist positiv definit, denn:

$$(x, x) = 4x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2 > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$$
$$(x, x) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, \text{ also } x = 0.$$

(x, y) ist also ein Skalarprodukt in V.

7.4b) Wie sieht die durch (x, y) induzierte Norm $\|x\|$ aus?

Lösung: Die durch (x, y) induzierte Norm ist

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x^\top Dx} = \sqrt{4x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2}.$$

7.4c) Berechnen Sie die Norm von $x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$.

Lösung: $\left\| \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4(-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{9}3^2} = \sqrt{2}.$

7.4d) Geben Sie den algebraischen Ausdruck und skizzieren Sie den Ball mit Radius 1 bezueglich dieser Norm.

Lösung: Der Ball mit Radius 1 ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}^2$, so dass $\|x\| < 1$ gilt. Dies ist äquivalent zu $\|x\|^2 < 1$. Gemäss der letzten Teilaufgabe sind das alle $x = [x_1, x_2]^\top$, so dass

$$4x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2 < 1.$$

7.4e) Finden Sie einen normierten Vektor, der orthogonal auf $x = [-1/2, 3]^\top$ steht.

Lösung: $y = [y_1, y_2]^\top$ steht orthogonal auf $x = [-1/2, 3]^\top$, wenn

$$0 = (x, y) = -2y_1 + \frac{1}{3}y_2,$$

ist. Also muss $y_2 = 6y_1$ sein. Somit steht z.B. $y = [1, 6]^\top$ senkrecht auf x. Die Norm von y ist $\|y\| = \sqrt{4 \cdot 1^2 + \frac{1}{9} \cdot 6^2} = \sqrt{8}$. Somit ist der folgende Vektor normiert, und steht senkrecht auf x:

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

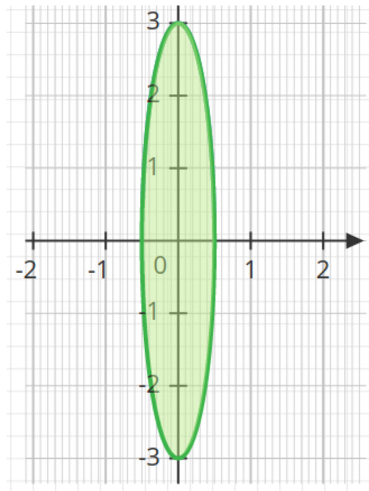


Abbildung 7.1: Ball mit Radius 1

Aufgabe 7.5

Multiple Choice: Online abzugeben.

7.5a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear:

(i) $\mathcal{F} : x \mapsto ax + b$ mit $x, a, b \in \mathbb{R}$

Falsch. $\mathcal{F}(x + y) = ax + ay + b \neq ax + ay + 2b = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ für $b \neq 0$.

(ii) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax + b$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$

Falsch. $\mathcal{F}(x + y) = Ax + Ay + b \neq Ax + Ay + 2b = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ für $b \neq 0$.

√ (iii) $\mathcal{F} : x \mapsto Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Richtig. Für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{F}(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$$
$$\mathcal{F}(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\mathcal{F}(x)$$

(iv) $\mathcal{F} : x \mapsto x^2 + 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$

Falsch. $\mathcal{F}(x + y) = (x + y)^2 + 3(x + y) \neq x^2 + 3x + y^2 + 3y = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ für mindestens ein x, y.

(v) $\mathcal{F} : x \mapsto \exp(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

Falsch. $\mathcal{F}(x + y) = \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \neq \exp(x) + \exp(y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ für mindestens ein x, y.

√ (vi) $\mathcal{F}$ nimmt eine Funktion f aus der Menge der stetigen Funktion von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$, notiert als $\mathcal{C}([0, 1])$, und gibt die Funktion $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ in $\mathcal{C}([0, 1])$ zurück.

Richtig. Für alle $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{F}(f + g) = \left(x \mapsto \int_0^x f(t) + g(t)\mathrm{d}t\right) = \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$$
$$\mathcal{F}(\alpha f) = \left(x \mapsto \int_0^x \alpha f(t)\mathrm{d}t\right) = \left(x \mapsto \alpha \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) = \alpha\mathcal{F}(f)$$

7.5b) Wir betrachten die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_2 = x_3$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ senkrecht auf E projiziert. Welche Aussagen treffen zu?

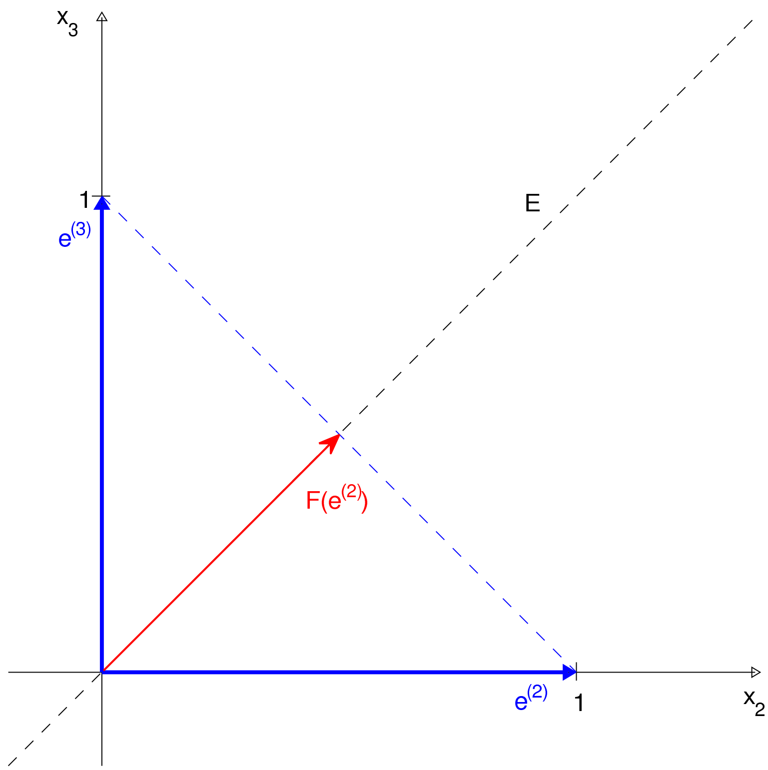
√ (i) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(ii) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Betrachte die Standardbasis $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$. Da $e^{(1)}$ bereits in E liegt, folgt:

$$\mathcal{F}\left(e^{(1)}\right) = e^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =: a^{(1)}.$$

Um $\mathcal{F}(e^{(2)})$, $\mathcal{F}(e^{(3)})$ zu bestimmen, betrachte die Ebene $\{x_1 = 0\}$ (siehe Bild). Die Abbildung $\mathcal{F}$ projiziert $e^{(2)}$ (bzw. $e^{(3)}$) senkrecht auf E (also parallel zu $(0, -1, 1)^\top$).



Es folgt aus dem Bild (z.B. mit Pythagoras) und aus Symmetriegründen, dass

$$\mathcal{F}\left(e^{(3)}\right) = \mathcal{F}\left(e^{(2)}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} =: a^{(2)} = a^{(3)}.$$

Es folgt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

7.5c) Gegeben ist ein Autokonstruktionsroboter, welcher immer die gleiche Drehung mit einem Stoss durchführt, um ein Element in die Karosserie einzufügen. Die dazugehörige lineare Abbildung ist $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ auf $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ abbildet. Nun, der Roboter operiert nicht bezüglich unserer Standardbasis, sondern bezüglich der Basis $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Welche Aussagen treffen zu?

(i) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\sqrt{2}\begin{bmatrix} -6.5 & -65 & -12.5 \\ 1.5 & 14 & 2.5 \\ -3.5 & -32 & -5.5 \end{bmatrix}$.

√ (ii) Die Matrix A, welche $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschreibt, lautet $\sqrt{2}\begin{bmatrix} -16.5 & -7.5 & 17.5 \\ -14.5 & -5.5 & 14.5 \\ -23 & -10 & 24 \end{bmatrix}$.

Sei $k_\mathcal{B}$ der Basiswechsel der einem Vektor in der Standardbasis die Koordinaten in der vom Roboter gehandhabten Basis, also $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, wiedergibt. Damit haben wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_\mathcal{B} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathbb{R}^3_\mathcal{B} \arrow[d, "k_\mathcal{B}^{-1}"] \\ \mathbb{R}^3_{\text{Std. Basis}} \arrow[u, "k_\mathcal{B}"] \arrow[r, "\text{Ges. lin. Abb.}"] & \mathbb{R}^3_{\text{Std. Basis}} \end{tikzcd}$$

Um $k_\mathcal{B}$ zu bestimmen, nutzen wir, dass $\mathcal{B}$ bereits in der Standardbasis ausgedrückt wird, das heisst $k_\mathcal{B}^{-1}((1,0,0)^\top) = (1,0,1)^\top, k_\mathcal{B}^{-1}((0,1,0)^\top) = (5,5,7)^\top, k_\mathcal{B}^{-1}((0,0,1)^\top) = (0,2,1)^\top$. Somit ist die zu $k_\mathcal{B}^{-1}$ zugehörige Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. Somit folgt, dass die zu $k_\mathcal{B}$ zugehörige Matrix, die Inverse zu der Matrix von $k_\mathcal{B}^{-1}$ ist. Die Inverse finden wir durch Lösen von

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Mittels Gausselimination erhalten wir $\begin{bmatrix} -9 & -5 & 10 \\ 2 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. Dies ist die Matrix, bezüglich $k_\mathcal{B}$. Um die gesuchte lineare Abbildung zu erhalten, folgen wir dem Diagramm und erkennen, dass die lineare Abbildung durch $k_\mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{F} \circ k_\mathcal{B}$ ausgedrückt wird. Die dazugehörige Matrix erhalten wir also durch

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & -5 & 10 \\ 2 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} -16.5 & -7.5 & 17.5 \\ -14.5 & -5.5 & 14.5 \\ -23 & -10 & 24 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung: Die falsche Matrix in der Aufgabe stammt aus der Berechnung von $k_\mathcal{B} \circ \mathcal{F} \circ k_\mathcal{B}^{-1}$.