Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 8

Aufgabe 8.1 Polynomielle Projektion

In dieser Aufgabe betrachten wir den Polynomraum $\mathcal{P}_{d+1}([-1,1])$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich d auf dem Interval $[-1,1]$ für $d \in \mathbb{N}_0$. Er ist ausgestattet mit dem *Skalarprodukt*

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{für alle } p, q \in \mathcal{P}_{d+1}([-1,1]),$$

und der *Monombasis*

$$\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, \dots, t \mapsto t^d\}.$$

Weiter seien die linearen Abbildungen $\mathcal{L}_{d+1} : \mathcal{P}_{d+1}([-1,1]) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathcal{L}_{d+1}(p) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(1) \end{bmatrix}, \quad p \in \mathcal{P}_{d+1}([-1,1]).$$

Schliesslich sind die ersten drei der sogenannten *Legendre-Polynome* gegeben durch

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1).$$

Wir betrachten nun Konzepte, wie sie im Zusammenhang mit der Diskussion linearer Abbildungen in der Vorlesung besprochen worden sind, für diesen Polynomraum.

8.1a) Geben Sie die Matrixdarstellung L von $\mathcal{L}_3$ bezüglich der monomialen Basis von $\mathcal{P}_3([-1,1])$ und der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ an.

Lösung: Es ist

$$\mathcal{L}_{d+1}(t^i) = \begin{bmatrix} (-1)^i \\ 1^i \end{bmatrix} = \begin{cases} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] & i \text{ gerade} \\ \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] & i \text{ ungerade} \end{cases},$$

und somit gilt

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.1b) Zeigen Sie, dass $\langle P_i, P_i\rangle = 1$ für $i = \{0,1,2\}$ und $\langle P_i, P_j\rangle = 0$ für $i \neq j$.

Lösung: Wir müssen zeigen, dass $\langle P_i, P_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ für $i, j = 0, 1, 2$. Da das Skalarprodukt symmetrisch ist, genügt es, die Fälle $i \le j$ anzuschauen:

$$\begin{aligned}
\langle P_0, P_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t\Big|_{t=1}^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\
\langle P_1, P_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}t\sqrt{\frac{3}{2}}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^3\Big|_{t=-1}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\
\langle P_2, P_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{5}{8}(3t^2-1)^2\,\mathrm{d}t = \frac{5}{8}\int_{-1}^{1} 9t^4 - 6t^2 + 1\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{9}{8}t^5 - \frac{10}{8}t^3 + \frac{5}{8}t\Big|_{t=-1}^{1} = \frac{9}{4} - \frac{10}{4} + \frac{5}{4} = 1 \\
\langle P_0, P_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{2}t\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4}t^2\Big|_{t=-1}^{1} = 0 \\
\langle P_0, P_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{5}}{4}(3t^2-1)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{5}}{4}t^3 - \frac{\sqrt{5}}{4}t\Big|_{t=-1}^{1} = 0 \\
\langle P_1, P_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{15}}{4}(3t^3 - t) = \frac{\sqrt{15}}{4}(\frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2)\Big|_{t=-1}^{1} = 0
\end{aligned}$$

8.1c) Bestimmen Sie nun die Matrixdarstellung $\tilde{L}$ von $\mathcal{L}_3$ bezüglich der Basis $\{P_0, P_1, P_2\}$ von $\mathcal{P}_3([-1,1])$ und der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

Lösung: Wir können entweder einen Basiswechsel mit dem Resultat aus 8.2a) durchführen oder erhalten durch einfaches Einsetzen der Basis in die Funktion, dass

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix}.$$

8.1d) Der *Rang* einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W ist definiert als die Dimension ihres Bildes $f(V)$ als Unterraum von W (siehe Vorlesung). Er entspricht dem Rang jeder zugehörigen Abbildungsmatrix. Was ist für allgemeines d der Rang von $\mathcal{L}_{d+1}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Wie wir in Aufgabe 8.2a) gesehen haben, gilt $\mathcal{L}_{d+1}(t^i) = \begin{bmatrix} (-1)^i \\ 1^i \end{bmatrix}$. Mit Gausselimination erhalten wir

$$\mathbf{L}_{d+1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \end{bmatrix},$$

wobei $\mathbf{L}_{d+1} \in \mathbb{R}^{2\times(d+1)}$ die Abbildungsmatrix von $\mathcal{L}_{d+1}$ bezüglich der monomialen Basis von $\mathcal{P}_{d+1}([-1,1])$ und der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ darstellt. Weil der Rang von $\mathcal{L}_{d+1}$ mit demjenigen jeder beliebigen Abbildungsmatrix von $\mathcal{L}_{d+1}$ übereinstimmt (das heisst, es kommt nicht auf die Wahl der jeweiligen Basen an), folgt

$$\operatorname{Rang} \mathcal{L}_{d+1} = \operatorname{Rang} \mathbf{L}_{d+1} = \begin{cases} 1, & d = 0 \\ 2, & d \ge 1 \end{cases}.$$

8.1e) Zeigen Sie, dass für $d \ge 2$

$$\mathcal{B}_{\text{Kern}} = \{t \mapsto 1 - t^2, t \mapsto t(1-t^2), t \mapsto t^2(1-t^2), \ldots, t \mapsto t^{d-2}(1-t^2)\}$$

eine Basis von $\operatorname{Kern}(\mathcal{L}_{d+1})$ ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $\dim\operatorname{Kern}(\mathcal{L}_{d+1})$ mithilfe der Dimensionsformel und Teilaufgabe 8.2d). Zeigen Sie dann, dass $\mathcal{B}_{\text{Kern}}$ im Kern enthalten und linear unabhängig ist.

Lösung: Mithilfe von 8.2d) und der Dimensionsformel erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dim\mathcal{P}_{d+1}([-1,1]) &= \dim\operatorname{Kern}(\mathcal{L}_{d+1}) + \underbrace{\dim\operatorname{Bild}(\mathcal{L}_{d+1})}_{=\operatorname{Rang}\mathcal{L}_{d+1}} \\ \iff \dim\operatorname{Kern}(\mathcal{L}_{d+1}) &= \dim\mathcal{P}_{d+1}([-1,1]) - \operatorname{Rang}\mathcal{L}_{d+1} \\ &= d+1-2 = d-1. \end{aligned}$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{B}_{\text{Kern}} = \{p_1(t) = 1-t^2, p_2(t) = t(1-t^2), p_3(t) = t^2(1-t^2), \ldots, p_{d-1}(t) = t^{d-2}(1-t^2)\}$ im Kern enthalten und linear unabhängig ist. Diese $d-1$ linear unabhängigen Vektoren bilden dann automatisch eine Basis von $\operatorname{Kern}(\mathcal{L}_{d+1})$.

- $\mathcal{B}_{\text{Kern}} \subseteq \operatorname{Kern}(\mathcal{L}_{d+1})$: $\mathcal{L}_{d+1}(p_i) = \begin{bmatrix} (-1)^{i-1}(1-(-1)^2) \\ 1^{i-1}(1-1^2) \end{bmatrix} = 0$
- $\mathcal{B}_{\text{Kern}}$ linear unabhängig: Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{R}$ mit

  $$\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i p_i = 0.$$

  Wir müssen zeigen, dass dann $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{d-1} = 0$ folgt. In der Monombasis erhalten wir das Gleichungssystem

  $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{d+1\times d-1}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{bmatrix} = 0.$$

  Durch sukzessives Addieren der i-ten zur $i+2$-ten Zeile für $i = 1, \ldots, d-1$ erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem

  $$\begin{bmatrix} I_{d-1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{bmatrix} = 0,$$

  und somit auch die einzige Lösung $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, d-1$.

8.1f) Berechnen Sie für die Vektoren $t \mapsto t^n \in \mathcal{P}_{d+1}([-1,1])$, $n \in \{0, 1, \ldots, d\}$, die jeweiligen Orthogonalprojektionen auf $\mathcal{P}_3([-1,1])$, also diejenigen Polynome in $\mathcal{P}_3([-1,1])$, deren Differenz zum ursprünglichen Polynom senkrecht zu $\mathcal{P}_3([-1,1])$, bezüglichen dem obigen Skalarprodukt, steht.

Hinweis: Verwenden Sie, dass sich die Orthogonalprojektion wegen dem Resultat aus Teilaufgabe 8.2b) leicht berechnen lassen.

Lösung: Aus 8.2b) wissen wir: $\tilde{\mathcal{B}} = \{P_0, P_1, P_2\}$ ist Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_3([-1,1])$. Somit ist die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{P}_3([-1,1])$ für jedes $p \in \mathcal{P}_{d+1}([-1,1])$ gegeben durch

$$\mathsf{P}_{\mathcal{P}_3([-1,1])}(p) = \sum_{j=0}^{2} \langle p, P_j \rangle P_j, \qquad \text{also}$$

$$\mathsf{P}_{\mathcal{P}_3([-1,1])}(t \mapsto t^n) = \langle t \mapsto t^n, P_0 \rangle P_0 + \langle t \mapsto t^n, P_1 \rangle P_1 + \langle t \mapsto t^n, P_2 \rangle P_2 = (*).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\langle t \mapsto t^n, P_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^n \,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{n+1} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \\
\langle t \mapsto t^n, P_1 \rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} t^{n+1} \,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{\sqrt{6}}{n+2} & n \text{ ungerade} \end{cases} \\
\langle t \mapsto t^n, P_2 \rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{1} t^n (3t^2 - 1) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{1} 3t^{n+2} - t^n \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \Big(\frac{3}{n+3} t^{n+3} - \frac{1}{n+1} t^{n+1} \Big) \Big|_{t=-1}^{1} \\
&= \begin{cases} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+1} \right) & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
(*) &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} + 0 + \frac{5}{4}\left(\frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+1}\right)(3t^2 - 1) & n \text{ gerade} \\ 0 + \frac{3}{n+2} t + 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{9}{4(n+1)} - \frac{15}{4(n+3)} + \frac{15}{4}\left(\frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+1}\right) t^2 & n \text{ gerade} \\ \frac{3}{n+2} t & n \text{ ungerade} \end{cases} .
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.2

8.2a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ bezüglich des Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

Lösung: <u>Berechnung von $b^{(1)}$</u>: $b^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Berechnung von $b^{(2)}$:

$$c^{(2)} = a^{(2)} - \langle a^{(2)},\, b^{(1)}\rangle\, b^{(1)}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=-3/\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\ b^{(2)} = \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Berechnung von $b^{(3)}$:

$$c^{(3)} = a^{(3)} - \langle a^{(3)},\, b^{(1)}\rangle\, b^{(1)} - \langle a^{(3)},\, b^{(2)}\rangle\, b^{(2)}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=-1/\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$- \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\rangle}_{=1/\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\ b^{(3)} = \frac{c^{(3)}}{\|c^{(3)}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

8.2b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

bezüglich der in Teilaufgabe 8.3a) berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$, das heisst, es soll gelten

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

Lösung: *1. Möglichkeit:*

Wir lösen mittels des Gaussverfahrens die Gleichung

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}$$

nach den Koordinaten x_1, x_2, x_3 auf:

$$\begin{array}{r} \\ -1 \\ 0 \end{array}\begin{array}{|ccc|c|} \hline -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 5 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 3 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 7 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{r} \\ \\ -1 \end{array}\begin{array}{|ccc|c|} \hline -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 5 \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{3} & 8 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\overset{(E)_2}{\rightarrow} \begin{array}{|ccc|c|} \hline -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 5 \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{3} & 8 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{3} & 15 \\ \hline \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen bekommt man:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{15}{3}\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \\ x_2 &= \frac{8 - \frac{2}{\sqrt{3}}5\sqrt{3}}{-2}\sqrt{6} = \sqrt{6} \\ x_1 &= \frac{5 + \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}5\sqrt{3}}{-1}\sqrt{2} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Da $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ eine orthonormale Basis bilden, lassen sich die Koordinaten auch mit weniger Aufwand finden. Denn die Matrix $B = \left[b^{(1)},\ b^{(2)},\ b^{(3)}\right]$ ist orthogonal und damit ist die Lösung des Gleichungssystems $x = B^T v$.

Durch Einsetzen der Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation ergibt sich somit $x_i = {b^{(i)}}^T v$ für $i = 1, 2, 3$. Die i-te Koordinate entspricht also dem Skalarprodukt von v mit dem i-ten Basisvektor $b^{(i)}$.

In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} x_1 =& \langle v, b^{(1)} \rangle = (5,\ 3,\ 7) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \\ x_2 =& \langle v, b^{(2)} \rangle = (5,\ 3,\ 7) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = -\frac{5}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{14}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}, \\ x_3 =& \langle v, b^{(3)} \rangle = (5,\ 3,\ 7) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

8.2c) *(freiwillig!)* Lösen Sie Teilaufgabe 8.3a) mit Hilfe der QR-Zerlegung in PYTHON.

Hinweis: In PYTHON liefert der Befehl `Q, R = scipy.linalg.qr(A)` die QR–Zerlegung der Matrix `A`.

Lösung: Wir benutzen die QR-Zerlegung, um eine orthonormale Basis zu berechnen. Siehe dazu Bemerkung 4.3.0.3.

Wir bilden aus den Spaltenvektoren $a^{(1)}, ..., a^{(3)}$ die Matrix $A = \left[a^{(1)}\ a^{(2)}\ a^{(3)}\right]$ und wenden darauf die QR-Zerlegung an.

Der folgende PYTHON-Code liefert das gewünschte Q:

```
import numpy as np
```

```
import scipy.linalg as la
A = np.array([[-1, 1, 1], [1, -2, 0], [0, 1, 1]])
Q, R = la.qr(A)
print(Q)
# Resultat fuer Q:
# [[-0.7071   -0.4082    0.5774]
#  [ 0.7071   -0.4082    0.5774]
#  [      0    0.8165    0.5774]]
```

Die Spalten der Matrix Q sind dann die gesuchten Vektoren.

8.2d) Berechnen Sie die Projektion von v auf $\operatorname{span}(a^{(1)}, a^{(2)})$.

Lösung: Es ist $\operatorname{span}(a^{(1)}, a^{(2)}) = \operatorname{span}(b^{(1)}, b^{(2)})$. Da die Vektoren $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ orthonormal sind, lässt sich die orthogonale Projektion $\mathsf{P}v$ auf $\operatorname{span}(b^{(1)}, b^{(2)})$ berechnen durch

$$\mathsf{P}v = v - \langle v, b^{(3)}\rangle b^{(3)} = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} = -\sqrt{2}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + \sqrt{6}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 8.3

Sei $V = \mathcal{P}_3$ der Vektorraum der reellen Polynome auf dem Intervall $[0, 1]$ vom Grad strikt kleiner als 3. Auf V ist durch

$$\big\langle p_1(x), p_2(x)\big\rangle \coloneqq \int_0^1 p_1(x)\, p_2(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt gegeben. Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von V, indem Sie das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren $1, x, x^2$ anwenden.

Lösung: Gegeben ist das Skalarprodukt $\big\langle p_1(x), p_2(x)\big\rangle \coloneqq \int_0^1 p_1(\xi)\, p_2(\xi)\, d\xi$. Eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$. Anwendung des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens ergibt:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1 &= v_1 = 1 \\
u_1 &= \frac{\tilde{u}_1}{\|\tilde{u}_1\|} = \frac{\tilde{u}_1}{\sqrt{\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1\, dx}} = \frac{1}{1} = 1 \\
\tilde{u}_2 &= v_2 - \langle u_1, v_2\rangle\, u_1 = x - \left(\int_0^1 x\, dx\right) 1 = x - \tfrac{1}{2} \\
u_2 &= \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{\tilde{u}_2}{\sqrt{\langle \tilde{u}_2, \tilde{u}_2\rangle}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\, dx}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = 2\sqrt{3}\big(x - \tfrac{1}{2}\big) \\
\tilde{u}_3 &= v_3 - \langle u_1, v_3\rangle\, u_1 - \langle u_2, v_3\rangle\, u_2 \\
&= x^2 - \left(\int_0^1 x^2\, dx\right) 1 - \left(\int_0^1 x^2 2\sqrt{3}(x - \tfrac{1}{2})\, dx\right) 2\sqrt{3}\big(x - \tfrac{1}{2}\big) \\
&= x^2 - \tfrac{1}{3} - 1\big(x - \tfrac{1}{2}\big) = x^2 - x + \tfrac{1}{6}\,. \\
u_3 &= \frac{\tilde{u}_3}{\|\tilde{u}_3\|} = \frac{\tilde{u}_3}{\sqrt{\langle \tilde{u}_3, \tilde{u}_3\rangle}} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 \big(x^2 - x + \frac{1}{6}\big)^2\, dx}} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{180}}} \\
&= 6\sqrt{5}\big(x^2 - x + \tfrac{1}{6}\big)
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Orthonormalbasis

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 2\sqrt{3}(x - \tfrac{1}{2}), \quad u_3 = 6\sqrt{5}(x^2 - x + \tfrac{1}{6}).$$

Aufgabe 8.4

Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ und $\alpha_n,\ \beta_m > 0$ im Vektorraum $V = C^0([0, 2\pi])$, den wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$$

ausstatten.

8.4a) Man rechne nach, dass je zwei verschiedene dieser Funktionen orthogonal sind.

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned}
\sin(u)\ \sin(v) &= \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v)) \\
\cos(u)\ \cos(v) &= \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v)) \\
\sin(u)\ \cos(v) &= \tfrac{1}{2}(\sin(u-v) + \sin(u+v))
\end{aligned}$$

Lösung: Wir müssen die Orthogonalitätsrelationen $\langle f_m, f_n \rangle = 0$, $\langle g_m, g_n \rangle = 0$ für $m \neq n$ zeigen sowie $\langle f_n, g_m \rangle = 0$ für alle m, n. Wir benutzen dafür die trigonometrischen Identitäten aus dem Hinweis und rechnen zuerst die drei Relationen für $m \neq n$ nach:

$$\begin{aligned}
\langle f_m, f_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_m \cos(mx)\big) \cdot \big(\alpha_n \cos(nx)\big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\alpha_m\alpha_n \left(\int_0^{2\pi} \cos((m-n)x)\, dx + \int_0^{2\pi} \cos((m+n)x)\, dx \right) \\
&\overset{m \neq n}{=} \frac{1}{2}\alpha_m\alpha_n \left(\frac{1}{m-n} \sin((m-n)x)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{m+n} \sin((m+n)x)\Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_m\alpha_n (0 - 0 + 0 - 0) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle g_m, g_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\beta_m \sin(mx)\big) \cdot \big(\beta_n \sin(nx)\big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\beta_m\beta_n \left(\int_0^{2\pi} \cos((m-n)x)\, dx - \int_0^{2\pi} \cos((m+n)x)\, dx \right) \\
&\overset{m \neq n}{=} \frac{1}{2}\beta_m\beta_n \left(\frac{1}{m-n} \sin((m-n)x)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{m+n} \sin((m+n)x)\Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2}\beta_m\beta_n (0 - 0 - 0 + 0) = 0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle f_n, g_m\rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_n \cos(nx)\big)\cdot\big(\beta_m \sin(mx)\big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_m\Big(\int_0^{2\pi} \sin((m-n)x)\,dx + \int_0^{2\pi} \sin((m+n)x)\,dx\Big) \\
&\overset{m\neq n}{=} \frac{1}{2}\alpha_n\beta_m\left(-\frac{1}{m-n}\cos((m-n)x)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{m+n}\cos((m+n)x)\Big|_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_m\left(-\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m-n}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+n}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Es bleibt die dritte Relation für $m = n \geq 1$ zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
\langle f_n, g_n\rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_n \cos(nx)\big)\cdot\big(\beta_n \sin(nx)\big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n\Big(\int_0^{2\pi} \sin(0)\,dx + \int_0^{2\pi} \sin(2nx)\,dx\Big) \\
&\overset{n\geq 1}{=} \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n\left(0 - \frac{1}{2n}\cos(2nx)\Big|_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

8.4b) Wie sind α_n und β_m zu wählen, damit alle diese Funktionen die Norm 1 haben?

Lösung: Für n, $m \geq 1$ bekommen wir

$$
\begin{aligned}
\langle f_n, f_n\rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_n \cos(nx)\big)\cdot\big(\alpha_n \cos(nx)\big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n^2\Big(\int_0^{2\pi} \cos(0)\,dx + \int_0^{2\pi} \cos(2nx)\,dx\Big) \\
&\overset{n\geq 1}{=} \frac{1}{2}\alpha_n^2\left(2\pi + \frac{1}{2n}\sin(2nx)\Big|_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n^2(2\pi + 0 - 0) = \alpha_n^2\,\pi, \\
\langle g_m, g_m\rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\beta_m \sin(mx)\big)\cdot\big(\beta_m \sin(mx)\big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\beta_m^2\Big(\int_0^{2\pi} \cos(0)\,dx - \int_0^{2\pi} \cos(2mx)\,dx\Big) \\
&\overset{m\geq 1}{=} \frac{1}{2}\beta_m^2\left(2\pi - \frac{1}{2m}\sin(2mx)\Big|_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\beta_m^2(2\pi - 0 + 0) = \beta_m^2\,\pi
\end{aligned}
$$

und für $n = 0$

$$
\langle f_0, f_0\rangle = \int_0^{2\pi} (\alpha_0\cdot 1)(\alpha_0 \cdot 1)\,dx = \alpha_0^2\cdot(2\pi).
$$

Die Funktionen f_n und g_m haben genau dann Norm 1, wenn $\langle f_n, f_n\rangle = 1$ und $\langle g_m, g_m\rangle = 1$ gilt. Somit muss $\alpha_n^2\,\pi = 1$ für $n \geq 1$ und $\beta_m^2\,\pi = 1$ für $m \geq 1$ sowie $2\alpha_0^2\,\pi = 1$ gelten. Also muss gelten:

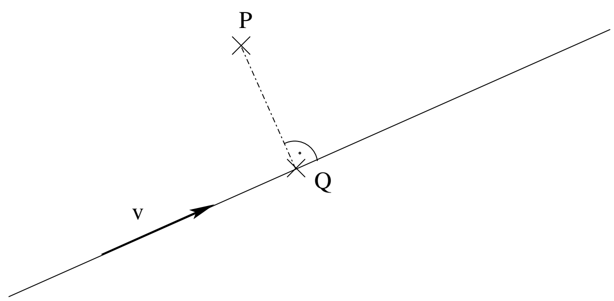
$$\alpha_n = \beta_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \forall\, n,\, m \geq 1,$$
$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Aufgabe 8.5

8.5a) Berechnen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts die orthogonale Projektion Q des Punktes $P = (-2, 4, 3)$ auf die Gerade $g = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0) + \lambda(2, 2, 1)\}$.

Hinweis: Machen Sie eine Skizze: Auf welchem Vektor muss $\vec{PQ}$ senkrecht stehen?

Lösung: Wir machen eine Skizze:



wobei $v = [2, 2, 1]^T$ die Richtung der Geraden g ist. Wir bemerken, dass $\vec{PQ}$ senkrecht auf v stehen muss. Folglich muss ihr Skalarprodukt gleich null sein, das heisst, $\vec{PQ} \cdot v = 0$. Ausserdem muss Q auf der Geraden g liegen, $Q = (1 + 2\lambda, 2\lambda, \lambda)$. Einsetzen ergibt

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} 2\lambda + 3 \\ 2\lambda - 4 \\ \lambda - 3 \end{bmatrix} \text{ und } \vec{PQ} \cdot v = 9\lambda - 5 = 0.$$

Es ist also $\lambda = \frac{5}{9}$ und $Q = (\frac{19}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9})$.

Aufgabe 8.6 Orthonormale Basis

Gegeben seien die Vektoren

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, das heisst, zeigen Sie, dass $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$

- Einheitsvektoren sind (das bedeutet, dass ihre Länge 1 ist, i.e. $\sqrt{\langle v^{(i)}, v^{(i)} \rangle} = 1$, $i = 1, 2, 3$),
- paarweise orthogonal sind

- und eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Lösung: Einheisvektoren: Zu zeigen ist, dass $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ die Länge 1 haben:

$$\begin{aligned}
\left\|v^{(1)}\right\| &= \sqrt{\langle v^{(1)}, v^{(1)}\rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{12}} = 1\\
\left\|v^{(2)}\right\| &= \sqrt{\langle v^{(2)}, v^{(2)}\rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}+0+\frac{2}{3}} = 1\\
\left\|v^{(3)}\right\| &= \sqrt{\langle v^{(3)}, v^{(3)}\rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{12}} = 1
\end{aligned}$$

Paarweise orthogonal: Zu zeigen ist, dass $\langle v^{(i)}, v^{(j)}\rangle = 0$ für $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\langle v^{(1)}, v^{(2)}\rangle &= \frac{1}{3}+0-\frac{2}{6} = 0\\
\langle v^{(1)}, v^{(3)}\rangle &= \frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{12} = 0\\
\langle v^{(2)}, v^{(3)}\rangle &= \frac{1}{3}+0-\frac{2}{6} = 0
\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie des Skalarprodukts gilt dann automatisch auch $\langle v^{(2)}, v^{(1)}\rangle = 0$ usw.

Der $\mathbb{R}^3$ ist 3-dimensional. Deswegen bilden die drei paarweise orthogonalen Einheitsvektoren $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Zusammenfassend sind sie also eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 8.7

Multiple Choice: Online abzugeben.

8.7a) Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist die Orthogonalprojektion von $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ auf $\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$ der Vektor $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

√ (i) richtig

(ii) falsch

Die Orthogonalprojektion von $v = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ auf $w = \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist gegeben durch

$$\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w = \frac{15}{45}\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

8.7b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

√ (i) richtig

(ii) falsch

Eine Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \cdots & a^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ist genau dann orthogonal, wenn $A^T A = I_n$ gilt. Nun beachte man, dass der Eintrag von $A^T A$ in der Zeile i und der Spalte j gleich dem euklidischen Skalarprodukt der Spalte i und der Spalte j ist:

$$(A^T A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{ik}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \langle a^{(i)}, a^{(j)} \rangle.$$

Somit ist die Orthogonalität von A äquivalent zu

$$\langle a^{(i)}, a^{(j)} \rangle = (I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$. Letzteres bedeutet genau, dass die Spalten von A eine Orthonormalbasis bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

8.7c) Falls sich die Graphen zweier Funktionen f und g senkrecht schneiden, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

(i) richtig

√ (ii) falsch

Die Aussage stimmt zum Beispiel für die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = -x$ nicht. Deren Graphen schneiden sich senkrecht im Ursprung, aber es gilt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b (-x^2)\,dx = \frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3} < 0,$$

also sind f und g nicht orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

8.7d) Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Funktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

√ (i) richtig

(ii) falsch

Eine ungerade Funktion f erfüllt die Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ und eine gerade Funktion g die Eigenschaft $g(-x) = g(x)$. Somit liefert die Substitution $y = -x$ die folgende Beziehung für das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{1}^{-1} f(-y)g(-y)\,(-dy) = \int_{-1}^{1} f(-y)g(-y)\,dy \\ &= \int_{-1}^{1} (-f(y))g(y)\,dy = -\int_{-1}^{1} f(y)g(y)\,dy = -\langle f, g\rangle.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\langle f, g\rangle = 0$, die ungerade Funktion f und die gerade Funktion g sind also orthogonal bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

8.7e) In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

(i) richtig

√ (ii) falsch

Für zwei Einheitsvektoren v und w besagt die Schwarz'sche Ungleichung (Satz 4.2.0.11), dass

$$\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle = 1 \cdot 1 = 1.$$

Daraus folgt $\langle v, w\rangle \leq 1$, das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren kann also nicht beliebig gross sein.

8.7f) In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.

(i) richtig

√ (ii) falsch

Man beachte, dass paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem Vektorraum mit Skalarprodukt automatisch linear unabhängig sind (siehe Satz 4.2.0.15). Somit kann es in einem Vektorraum der Dimension n höchstens n paarweise orthogonale Einheitsvektoren geben.