Dr. V. Gradinaru
F. Jin

Herbstsemester 2022

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Serie 9

Definition: Vektorprodukt *Seien die zwei Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3)^\top,\ w = (w_1, w_2, w_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ gegeben, so definieren wir das Vektorprodukt $v \times w \in \mathbb{R}^3$ als*

$$v \times w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}.$$

Betrachten sie dazu auch die Lektüre zur Vektorrechnung von Daniel Stoffer auf der Webseite.

Aufgabe 9.1

9.1a) Berechnen Sie

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

9.1b) Bestimmen Sie mit dem Vektorprodukt einen Normalenvektor der Ebene

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) + \lambda(0, 2, 1) + \mu(-1, 2, 3),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Bestimmen Sie ausserdem Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}.$$

Aufgabe 9.2

9.2a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\}$ mit der Geraden $g = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = (-2, 1, 3) + \lambda(1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

9.2b) Geben Sie einen möglichst einfachen Punkt P an, der sowohl auf E_1 als auch auf E_2 liegt, wobei $E_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

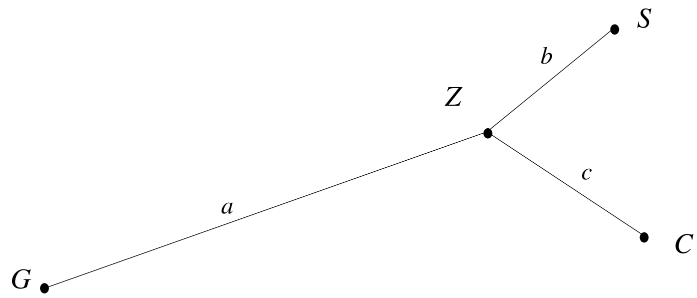
9.2c) Geben Sie mit Hilfe des Vektorprodukts die Richtung der Schnittgeraden von E_1 und E_2 an.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Normalenvektoren von E_1 und E_2.

Aufgabe 9.3

Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:

Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118



Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht.

9.3a) Bestimmen Sie für ihn die ausgeglichenen Werte für die Längen a, b, c der Teilstrecken durch Lösen der Normalengleichungen.

9.3b) *(freiwillig!)* Bestimmen Sie a, b, c mit Hilfe der QR–Zerlegung in PYTHON.

9.3c) *(freiwillig!)* Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit dem `scipy.linalg.lstsq`-Operator in PYTHON.

Aufgabe 9.4 Berechnen Sie die Determinanten der beiden Matrizen

9.4a) Berechnen Sie die Determinanten der beiden folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} e & e & -e & -e \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ \pi & \pi & \pi & \pi \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & y & y & y & y \\ x & y & z & z & z \\ x & y & z & u & u \\ x & y & z & u & v \end{bmatrix},$$

9.4b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -2.94 & -4.65 & 4.41 & -0.15 & 1.31 & 0.00 & 2.18 & -2.08 & -0.14 & 2.64 \\ 4.54 & -1.60 & 4.79 & -1.63 & 3.89 & 0.00 & 4.05 & -3.75 & -2.48 & -3.14 \\ 1.47 & -0.37 & -1.20 & -4.73 & 3.87 & 0.00 & -0.45 & 3.27 & 0.11 & -1.76 \\ -1.69 & -0.68 & -4.80 & 3.56 & -0.60 & 0.00 & 2.26 & -4.18 & -1.22 & -2.73 \\ 2.04 & -4.82 & -2.25 & -4.00 & 4.43 & 0.00 & 1.93 & -1.11 & -0.55 & 2.46 \\ 3.20 & -3.97 & -2.47 & 1.00 & 4.64 & 0.00 & 0.56 & -2.35 & 0.90 & -1.26 \\ -3.78 & -2.56 & 3.63 & 4.94 & -0.04 & 0.00 & 2.01 & -1.29 & 3.97 & 3.28 \\ 4.08 & -4.01 & -1.71 & 1.52 & 0.72 & 0.00 & -3.99 & -0.77 & -2.29 & -4.72 \\ 1.08 & -0.43 & 2.78 & -3.60 & 0.02 & 0.00 & -4.54 & 4.45 & -4.67 & -3.84 \\ -4.44 & 2.97 & 4.25 & -1.88 & -1.85 & 0.00 & -3.15 & 4.25 & 2.02 & 3.19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.5

Die Runge-Funktion ist definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Wir wollen diese Funktion auf dem Interval $[-5, 5]$ mit einem Polynom $P_n(x)$ von Grad n approximieren. Wir fordern, dass P_n die Funktion f an m gleichmässig in $[-5, 5]$ verteilten Punkten x_i möglichst gut approximiert und schreiben dies als lineares Ausgleichsproblem der Form

$$Ac = b, \tag{9.5.1}$$

wobei c die $n + 1$ Koeffizienten des Polynoms P_n sind.

9.5a) Bestimmen Sie die Matrix A und die rechte Seite b.

9.5b) Wie können Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung von A lösen? Beschreiben und begründen Sie das Vorgehen.

9.5c) *(freiwillig!)* Ergänzen Sie die PYTHON-Template `Exercise9_5_temp.py`, die die Lösung des Ausgleichsproblems (9.5.1) für beliebige m und n mit $m \geq n+1$ berechnet und anschliessend die Lösung für Grad $2 \leq n \leq 13$ und $m = 20$ plottet.

Aufgabe 9.6

Multiple Choice: Online abzugeben.

9.6a) Sei die QR-Zerlegung der $m \times n$-Matrix A, $m > n$, gegeben mit Q orthogonal und $R = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$, wobei $0_{(m-n)\times n}$ eine Null-Matrix bezeichne. Die Spalten von A seien linear abhängig, dann ist die $n \times n$-Matrix R_0

(i) singulär.

(ii) regulär.

(iii) nicht eindeutig regulär, oder singulär.

9.6b) Falls die Spaltenvektoren der Matrix der Fehlergleichungen linear unabhängig sind, so haben die Normalengleichungen

(i) genau eine Lösung.

(ii) unendlich viele Lösungen.

(iii) keine Lösung.

Gegeben sind die drei Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, in der Ebene mit

x_i	0	1	2
y_i	5.41	5.17	5.93

Es soll mit Hilfe der Ausgleichsrechnung eine lineare Funktion $y = f(x) = ax + b$ gefunden werden, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y–Richtung,

$$\sum_{i=1}^{3} [f(x_i) - y_i]^2,$$

minimal wird (lineare Regression).

9.6c) Die Matrix der Fehlergleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 5.41 \\ 1 & 5.17 \\ 2 & 5.93 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5.41 & 5.17 & 5.93 \end{bmatrix}$

9.6d) Die Matrix der Normalengleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 5 & 17.03 \\ 17.03 & 91.1619 \end{bmatrix}$

9.6e) Daraus ergibt sich für die Parameter der linearen Funktion:

(i) $a = 0.27, b = 5.21\overline{2}$

(iii) $a = 0.15, b = 5.24\overline{7}$

(ii) $a = 0.26, b = 5.24\overline{3}$

wobei wir mit dem Überstrich die periodische Dezimalbruchdarstellung bezeichnen.

Aufgabe 9.7

Multiple Choice: Online abzugeben.

9.7a) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für beliebige rechte Seiten lösbar. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$,

(ii) $\det A \neq 0$.

9.7b) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ habe nur die triviale Lösung. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$,

(ii) $\det A \neq 0$.

9.7c) Sei M eine orthogonale Matrix. Daraus folgt

(i) $\det M \neq 0$,

(ii) $\det M = 0$,

(iii) $\det M = \pm 1$.

9.7d) Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

9.7e) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A im folgenden Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

(i) $\det A = -\frac{1}{\alpha+2}$,

(ii) $\det A = \alpha + 2$,

(iii) $\det A = -\alpha - 2$.

9.7f) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystemes aus Aufgabe 9.7e)

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

ist für $\alpha = -2$:

(i) die leere Menge,

(ii) $x_1 = -3/4, \quad x_2 = 5/4$,

(iii) $x_1 = t - 2, \quad x_2 = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Abgabe:

Bis 25. November, 10:00 Uhr im Vorraum vor dem HG G 53.2.