Dr. V. Gradinaru
F. Jin

Herbstsemester 2022

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 9

Aufgabe 9.1

9.1a) Berechnen Sie

$$\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Lösung: Wir berechnen

$$\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

9.1b) Bestimmen Sie mit dem Vektorprodukt einen Normalenvektor der Ebene

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) + \lambda(0, 2, 1) + \mu(-1, 2, 3),\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Bestimmen Sie ausserdem Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}.$$

Lösung: Der Normalenvektor n auf E muss senkrecht zu $[0, 2, 1]^T$ und zu $[-1, 2, 3]^T$ stehen. Wir berechnen n über das Vektorprodukt:

$$n = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

Wir nehmen nun die Ebenengleichung

$$[x_1, x_2, x_3]^T = [1, 1, 1]^T + \lambda[0, 2, 1]^T + \mu[-1, 2, 3]^T$$

und berechnen das Skalarprodukt von n mit beiden Seiten dieser Gleichung:

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 = (4 - 1 + 2) + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0,$$

da n senkrecht auf die beiden Richtungsvektoren steht. Somit haben wir die Koeffizienten für die alternative Darstellung von E gefunden:

$$a = 4, b = -1, c = 2, d = 5.$$

Aufgabe 9.2

9.2a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\}$ mit der Geraden $g = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = (-2, 1, 3) + \lambda(1, 1, 1)\,, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Lösung: Da der Schnittpunkt Q von g und E_1 auf g liegt, gilt $Q = (x_1, x_2, x_3)$ mit

$$x_1 = -2 + \lambda, x_2 = 1 + \lambda, x_3 = 3 + \lambda$$

für ein gewisses $\lambda \in \mathbb{R}$. Um dieses zu bestimmen, benutzen wir, dass Q auch auf E_1 liegen muss:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ \Rightarrow 2(-2+\lambda) - 4(1+\lambda) + 3(3+\lambda) = 1 + \lambda &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= -1. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich der Schnittpunkt $Q = (-3, 0, 2)$.

9.2b) Geben Sie einen möglichst einfachen Punkt P an, der sowohl auf E_1 als auch auf E_2 liegt, wobei $E_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

Lösung: Der Punkt $P = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ liegt sowohl auf E_1 als auch auf E_2, denn es gilt

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

9.2c) Geben Sie mit Hilfe des Vektorprodukts die Richtung der Schnittgeraden von E_1 und E_2 an.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Normalenvektoren von E_1 und E_2.

Lösung: Der Normalenvektor zur Ebene E_1 ist senkrecht zu allen Vektoren in E_1, also auch zur Richtung v der Schnittgeraden von E_1 und E_2. Das Gleiche gilt für den Normalenvektor zu E_2. Wir bestimmen die Normalenvektoren n_1 und n_2:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Also ist $n_1 = [2, -4, 3]^T$ senkrecht zu allen Vektoren in E_1. Auf gleiche Weise erhalten wir den Normalenvektor zu E_2, $n_2 = [1, 1, -1]^T$.

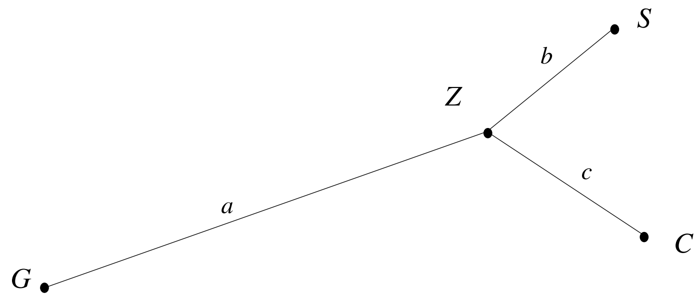
Die Richtung v der Schnittgeraden von E_1 und E_2 ist senkrecht zu n_1 und n_2, entspricht also ihrem Vektorprodukt:

$$v = n_1 \times n_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 9.3

Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:

Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118



Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht.

9.3a) Bestimmen Sie für ihn die ausgeglichenen Werte für die Längen a, b, c der Teilstrecken durch Lösen der Normalengleichungen.

Lösung: Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a \qquad -280 = r_1 \\ a+b-390 = r_2 \\ a+c-400 = r_3 \\ b+c-210 = r_4 \\ c \qquad -118 = r_5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{=:x} - \underbrace{\begin{bmatrix} 280 \\ 390 \\ 400 \\ 210 \\ 118 \end{bmatrix}}_{=:c} = r$$

$$\Rightarrow \; Ax - c = r$$

Normalengleichungen: $A^T Ax = A^T c$, wobei

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T c = \begin{bmatrix} 1070 \\ 600 \\ 728 \end{bmatrix}.$$

Gausselimination ergibt:

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 3 & 1 & 1 & 1070 \\ 1 & 2 & 1 & 600 \\ 1 & 1 & 3 & 728 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\to} \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 2 & 1 & 600 \\ 0 & -5 & -2 & -730 \\ 0 & -1 & 2 & 128 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_2}{\to} \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 2 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 2 & 128 \\ 0 & 0 & -12 & -1370 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1370}{12} = 114.1\overline{6} = \frac{685}{6} \\ -b + 2c = 128 \;\Rightarrow\; b = \frac{1204}{12} = 100.\overline{3} = \frac{301}{3} \\ a + 2b + c = 600 \;\Rightarrow\; a = \frac{3422}{12} = 285.1\overline{6} = \frac{1711}{6} \end{array} \right.$$

9.3b) *(freiwillig!)* Bestimmen Sie a, b, c mit Hilfe der QR–Zerlegung in PYTHON.

Lösung:

```
import numpy as np
import scipy.linalg as la

#Eingabe der Daten
A=[[1,0,0], [1,1,0],[1,0,1], [0,1,1], [0,0,1]]
c=np.transpose([280, 390,  400, 210, 118])

Q,R= la.qr(A) #Lösen von Ax-c=r mittels QR-Zerlegung
```

```
d=np.transpose(Q)@c #Transformation von c
xqr=la.solve(R[0:3:1,0:3:1],d[0:3:1]) #Rückwärtseinsetzen

print("a: {0}\nb: {1}\nc: {2}".format(xqr[0], xqr[1], xqr[2]))
#Ergibt die Lösung
#a: 285.1666666666667
#b: 100.33333333333329
#c: 114.16666666666667
```

9.3c) *(freiwillig!)* Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit dem `scipy.linalg.lstsq`-Operator in PYTHON.

Lösung:

```
a=la.lstsq(A,c)[0]; #die Ausgabe von lstsq ist wie folgt: approximierte
#Lösung, Rang von A, Summe der quadratischen Residuen der approx.
#Lösung und Singulärwerte von A

print("a: {0}\nb: {1}\nc: {2}".format(a[0],a[1],a[2]))
#Ergibt die Lösung
#a: 285.1666666666668
#b: 100.33333333333329
#c: 114.16666666666664
```

Aufgabe 9.4 Berechnen Sie die Determinanten der beiden Matrizen

9.4a) Berechnen Sie die Determinanten der beiden folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} e & e & -e & -e \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ \pi & \pi & \pi & \pi \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & y & y & y & y \\ x & y & z & z & z \\ x & y & z & u & u \\ x & y & z & u & v \end{bmatrix},$$

Lösung: Wir führen den Gauss-Algorithmus durch:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} e & e & -e & -e \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ \pi & \pi & \pi & \pi \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e & 10 & \pi & 0 \\ e & 20 & \pi & 0.1 \\ -e & 30 & \pi & 0.2 \\ -e & 40 & \pi & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1) \\ (+1) \\ (+1) \end{array}$$

$$= \det \begin{bmatrix} e & 10 & \pi & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0.1 \\ 0 & 40 & 2\pi & 0.2 \\ 0 & 50 & 2\pi & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (-4) \\ (-5) \end{array} = \det \begin{bmatrix} e & 10 & \pi & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2\pi & -0.2 \\ 0 & 0 & 2\pi & -0.5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ (-1) \end{array}$$

$$= \det \begin{bmatrix} e & 10 & \pi & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2\pi & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix} = e \cdot 10 \cdot 2\pi \cdot (-0.3)$$

Die Determinante von A ist also $-6\pi e$.

Nun führen wir den Gauss-Algorithmus für B aus:

$$\det B = \det \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & y & y & y & y \\ x & y & z & z & z \\ x & y & z & u & u \\ x & y & z & u & v \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & y-x & y-x & y-x & y-x \\ 0 & y-x & z-x & z-x & z-x \\ 0 & y-x & z-x & u-x & u-x \\ 0 & y-x & z-x & u-x & v-x \end{bmatrix}$$

$$= x \cdot \det \begin{bmatrix} y-x & y-x & y-x & y-x \\ y-x & z-x & z-x & z-x \\ y-x & z-x & u-x & u-x \\ y-x & z-x & u-x & v-x \end{bmatrix} = x \cdot \det \begin{bmatrix} y-x & y-x & y-x & y-x \\ 0 & z-y & z-y & z-y \\ 0 & z-y & u-y & u-y \\ 0 & z-y & u-y & v-y \end{bmatrix}$$

$$= x(y-x) \det \begin{bmatrix} z-y & z-y & z-y \\ z-y & u-y & u-y \\ z-y & u-y & v-y \end{bmatrix}$$

$$= x(y-x) \det \begin{bmatrix} z-y & z-y & z-y \\ 0 & u-z & u-z \\ 0 & u-z & v-z \end{bmatrix}$$

$$= x(y-x)(z-y) \det \begin{bmatrix} u-z & u-z \\ u-z & v-z \end{bmatrix} = x(y-x)(z-y)(u-z)(v-u).$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ für alle 2×2-Matrizen gilt.

9.4b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -2.94 & -4.65 & 4.41 & -0.15 & 1.31 & 0.00 & 2.18 & -2.08 & -0.14 & 2.64 \\ 4.54 & -1.60 & 4.79 & -1.63 & 3.89 & 0.00 & 4.05 & -3.75 & -2.48 & -3.14 \\ 1.47 & -0.37 & -1.20 & -4.73 & 3.87 & 0.00 & -0.45 & 3.27 & 0.11 & -1.76 \\ -1.69 & -0.68 & -4.80 & 3.56 & -0.60 & 0.00 & 2.26 & -4.18 & -1.22 & -2.73 \\ 2.04 & -4.82 & -2.25 & -4.00 & 4.43 & 0.00 & 1.93 & -1.11 & -0.55 & 2.46 \\ 3.20 & -3.97 & -2.47 & 1.00 & 4.64 & 0.00 & 0.56 & -2.35 & 0.90 & -1.26 \\ -3.78 & -2.56 & 3.63 & 4.94 & -0.04 & 0.00 & 2.01 & -1.29 & 3.97 & 3.28 \\ 4.08 & -4.01 & -1.71 & 1.52 & 0.72 & 0.00 & -3.99 & -0.77 & -2.29 & -4.72 \\ 1.08 & -0.43 & 2.78 & -3.60 & 0.02 & 0.00 & -4.54 & 4.45 & -4.67 & -3.84 \\ -4.44 & 2.97 & 4.25 & -1.88 & -1.85 & 0.00 & -3.15 & 4.25 & 2.02 & 3.19 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir finden, dass die sechste Spalte eine Nullspalte ist, deshalb ist $\det C = 0$. Das folgt, da die Determinante einer Matrix mit einer Nullspalte Null ist, siehe Bemerkung 6.1.0.6, (6).

Aufgabe 9.5

Die Runge-Funktion ist definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Wir wollen diese Funktion auf dem Interval $[-5,5]$ mit einem Polynom $P_n(x)$ von Grad n approximieren. Wir fordern, dass P_n die Funktion f an m gleichmässig in $[-5,5]$ verteilten Punkten x_i möglichst gut approximiert und schreiben dies als lineares Ausgleichsproblem der Form

$$Ac = b, \tag{9.5.1}$$

wobei c die $n+1$ Koeffizienten des Polynoms P_n sind.

9.5a) Bestimmen Sie die Matrix A und die rechte Seite b.

Lösung: Ein Polynom vom Grad n hat die allgemeine Form

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

wobei die Koeffizienten $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ die Unbekannten sind. Es soll möglichst genau gelten, dass

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Wir können diese Bedingungen wie folgt in Matrix-Form schreiben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}}_{b}.$$

9.5b) Wie können Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung von A lösen? Beschreiben und begründen Sie das Vorgehen.

Lösung: Mit $A = QR$ finden wir:

$$\begin{aligned} \|r\|_2^2 &= \|Ac - b\|_2^2 \\ &= \|QRc - QQ^T b\|_2^2 \\ &= \|Q(Rc - Q^T b)\|_2^2 \\ &= \|Rc - Q^T b\|_2^2 \\ &= \|R_0 c - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2, \end{aligned}$$

wobei wir die Matrix R und den Vektor $d = Q^T b$ wie folgt aufgeteilt haben:

$$R = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_0 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}, \quad d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}, \quad d_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Dann lösen wir das lineare System $R_0 c = d_0$.

9.5c) *(freiwillig!)* Ergänzen Sie die PYTHON-Template `Exercise9_5_temp.py`, die die Lösung des Ausgleichsproblems (9.5.1) für beliebige m und n mit $m \geq n+1$ berechnet und anschliessend die Lösung für Grad $2 \leq n \leq 13$ und $m = 20$ plottet.

Lösung: Der folgende Code berechnet die Lösung für beliebige m und n. Die Lösungen für $2 \leq n \leq 13$ sind in Abbildung 9.1 dargestellt.

```
import numpy as np
import scipy.linalg as la
import matplotlib.pyplot as plt
cmap = plt.cm.get_cmap('viridis')
#The color maps is included so that the different graphs we need to
#plot can have distinguishable colors.

#Construction of the Runge least square approximationg function:
def runge_lstsq(n,m):
```

```
        if (n+1)>m:
                print("Error: it must hold m>=n+1")
                return
        a=-5
        b=5
        x=np.linspace(a,b, m)
        f=[1/(1+i*i) for i in x]
        #Creation of the matrix A:
        A=np.zeros((m,n+1))
        for i in range(n+1):
                for j in range(m):
                                A[j][i]= (x[j])**i
        #Finding the least square solution to the problem.
        #Instead of using the lstsq function, it is possible to utilize
        #the same approach as in exercise 9.3
        c=la.lstsq(A,f)[0]
        d=[np.polyval(np.flip(c), i) for i in np.linspace(a,b,1000)]
        #evaluation of the approximating polynomial.
        #The value 1000 was chosen as an arbitrary big number.
        plt.plot(np.linspace(a,b,1000),d, label="n={0}".format(n), \
        color=cmap(3/4*n/13))
        #creation of the graph associated to the polynomial.
        return c

a=-5
b=5
for i in range(2, 14):
        c=runge_lstsq(i,20)
plt.plot(np.linspace(a,b,1000),[1/(1+i*i) for i in \
np.linspace(a,b,1000)], label='f', color=cmap(4/5))
#evaluation of the function.
#The value 1000 was chosen as an arbitrary big number.

#plotting the graphs:
plt.legend()
plt.show()
```

Aufgabe 9.6

Multiple Choice: Online abzugeben.

9.6a) Sei die QR-Zerlegung der $m \times n$-Matrix A, $m > n$, gegeben mit Q orthogonal und $R = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$, wobei $0_{(m-n)\times n}$ eine Null-Matrix bezeichne. Die Spalten von A seien linear abhängig, dann ist die $n \times n$-Matrix R_0

√ (i) singulär.

(ii) regulär.

(iii) nicht eindeutig regulär, oder singulär.

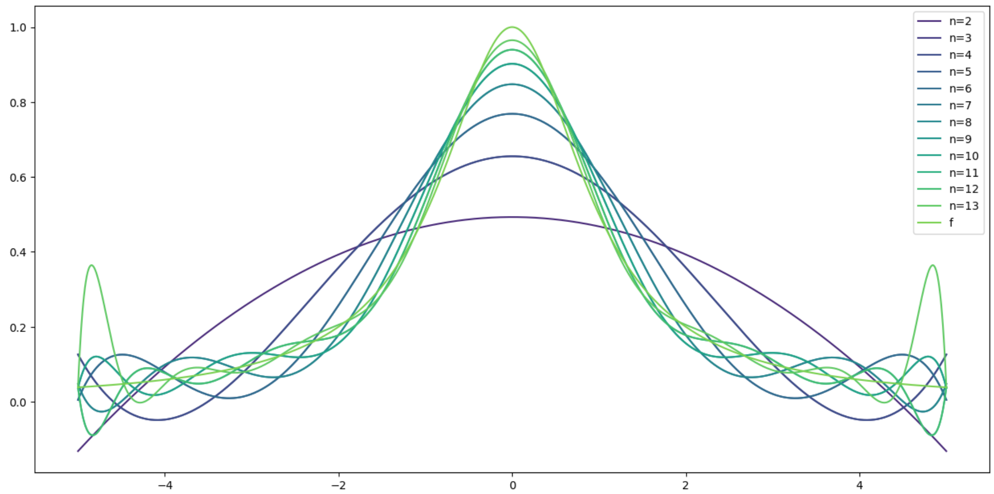


Abbildung 9.1: Lösungen für $m = 20$ und $2 \leq n \leq 13$.

Es gilt $Ax = 0 \Leftrightarrow QRx = 0 \Leftrightarrow Rx = 0 \Leftrightarrow R_0x = 0$. Sind die Spalten von A linear abhängig, so hat das homogene System $Ax = 0$ und somit $R_0x = 0$ nichttriviale Lösungen. Nach Bemerkung 1.2.0.23 erhalten wir somit, dass R_0 singulär ist.

9.6b) Falls die Spaltenvektoren der Matrix der Fehlergleichungen linear unabhängig sind, so haben die Normalengleichungen

√ (i) genau eine Lösung.

(ii) unendlich viele Lösungen.

(iii) keine Lösung.

Es gibt genau eine Lösung. Seien (v, w) die zwei Spalten der Matrix der Fehlergleichung. Seien diese linear unabhängig. Dann ist die Matrix der Normalengleichung gleich $\begin{bmatrix} v^\top \\ w^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^\top v & v^\top w \\ w^\top v & w^\top w \end{bmatrix}$. Mittels der Definition der linearen Unabhängigkeit sehen wir, dass wenn (v, w) linear unabhängig sind, dass auch die Matrix der Normalengleichung zwei linear unabhängige Spalten hat und somit invertierbar ist.

Gegeben sind die drei Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, in der Ebene mit

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 5.41 & 5.17 & 5.93 \end{array}.$$

Es soll mit Hilfe der Ausgleichsrechnung eine lineare Funktion $y = f(x) = ax + b$ gefunden werden, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y–Richtung,

$$\sum_{i=1}^{3} [f(x_i) - y_i]^2,$$

minimal wird (lineare Regression).

9.6c) Die Matrix der Fehlergleichungen lautet:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 5.41 \\ 1 & 5.17 \\ 2 & 5.93 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\surd$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5.41 & 5.17 & 5.93 \end{bmatrix}$

Aus $f(x) = ax + b$ folgt $f(0) = b,\ f(1) = a + b,\ f(2) = 2a + b$.
Die Fehlergleichungen lauten also:

$$\left.\begin{array}{l} b \quad\quad\; -5.41 = r_1 \\ a + b \;\; -5.17 = r_2 \\ 2a + b - 5.93 = r_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{=:z} - \underbrace{\begin{bmatrix} 5.41 \\ 5.17 \\ 5.93 \end{bmatrix}}_{=:c} = r.$$

Also ist hier die dritte Antwort richtig.

9.6d) Die Matrix der Normalengleichungen lautet:

$\surd$ (i) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ $\qquad$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 17.03 \\ 17.03 & 91.1619 \end{bmatrix}$

Da die beiden Spalten von A linear unabhängig sind, wissen wir von Satz 5.2.0.2, dass die Lösung der Normalengleichungen $A^T A\, z = A^T c$ die Fehlergleichungen im Sinne der kleinsten Quadrat minimiert. Es gilt

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Also ist hier die erste Antwort richtig.

9.6e) Daraus ergibt sich für die Parameter der linearen Funktion:

(i) $a = 0.27, b = 5.21\overline{2}$ $\qquad$ (iii) $a = 0.15, b = 5.24\overline{7}$

$\surd$ (ii) $a = 0.26, b = 5.24\overline{3}$

wobei wir mit dem Überstrich die periodische Dezimalbruchdarstellung bezeichnen.

Löse $A^T A\, z = A^T c$. Es gilt $A^T c = \begin{bmatrix} 17.03 \\ 16.51 \end{bmatrix}$ und mit Hilfe des Gaussverfahrens:

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline 5 & 3 & 17.03 \\ 3 & 3 & 16.51 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\to} \begin{array}{|cc|c|} \hline 5 & 3 & 17.03 \\ 0 & \frac{6}{5} & 6.292 \\ \hline \end{array} \Rightarrow b = 5.24\overline{3},\ a = 0.26.$$

Damit ist die zweite Antwort richtig.

Aufgabe 9.7

Multiple Choice: Online abzugeben.

9.7a) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei nicht für beliebige rechte Seiten lösbar. Daraus folgt

$\surd$ (i) $\det A = 0$, (ii) $\det A \neq 0$.

Gemäss Bemerkungen 1.2.0.23 und 6.1.0.2, 1 gilt

$Ax = b$ nicht für beliebige rechte Seiten lösbar $\iff$ A singulär $\iff$ $\det A = 0$.

9.7b) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ habe nur die triviale Lösung. Daraus folgt

(i) $\det A = 0$, $\surd$ (ii) $\det A \neq 0$.

Siehe wieder Bemerkungen 1.2.0.23 und 6.1.0.2, 1:

$Ax = 0$ hat nur triviale Lösung $\iff$ A regulär $\iff$ $\det A \neq 0$.

9.7c) Sei M eine orthogonale Matrix. Daraus folgt

$\surd$ (i) $\det M \neq 0$, (ii) $\det M = 0$, $\surd$ (iii) $\det M = \pm 1$.

$\det M \neq 0$ und $\det M = \pm 1$ sind richtig. Weil orthogonale Matrizen regulär / invertierbar sind folgt $\det M \neq 0$, und da $M^{-1} = M^T$ bei orthogonalen Matrizen, folgt dass

$$1 = \det I_n = \det(M^{-1}M) = \det(M^T M) \overset{\text{Bem. 6.1.0.6.(9)}}{=} \det M^T \cdot \det M \overset{\text{Bem. 6.1.0.6.(10)}}{=} (\det M)^2 ,$$

also $\det M = \pm 1$.

9.7d) Die LR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} .$$

Daraus folgt $\det A = 60$.

(i) Richtig. $\surd$ (ii) Falsch.

Die Aussage ist falsch. Gemäss der LR-Zerlegung haben wir $PA = LR$. Da die Matrix L Einsen in der Diagonalen hat und eine Dreiecksmatrix ist, folgt $\det L = 1$ (Bemerkung 6.1.0.6, (7)). Die Matrix P ist orthogonal, insbesondere gilt $\det P = \pm 1$ (siehe Aufgabe 9.7c)). Aus Bemerkung 6.1.0.6, (9) folgt

$$\det P \det A = \det L \det R\ ,$$

und daraus:

$$\det A = (\det P)^{-1} \cdot \det L \cdot \det R = (\pm 1) \cdot \det R \cdot 1 = \pm 60\ .$$

9.7e) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A im folgenden Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

(i) $\det A = -\frac{1}{\alpha+2}$, (ii) $\det A = \alpha + 2$, $\surd$ (iii) $\det A = -\alpha - 2$.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$, also $\det A = -1 \cdot 2 - \alpha \cdot 1 = -2 - \alpha$ (siehe Bemerkung 6.1.0.7.)

9.7f) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystemes aus Aufgabe 9.7e)

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \alpha\, x_1 & + & 2\, x_2 & = & 1 \end{array}$$

ist für $\alpha = -2$:

$\surd$ (i) die leere Menge,

(ii) $x_1 = -3/4, \quad x_2 = 5/4$,

(iii) $x_1 = t - 2, \quad x_2 = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Das System $\begin{array}{c} -x_1 + x_2 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 = 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} -x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 1/2 \end{array}$ hat keine Lösung.