Lineare Algebra für D-ITET, RW

Serie 10

Aufgabe 10.1

10.1a) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix, das heisst, bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

10.1b) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

10.1c) *(freiwillig!)* Überprüfen Sie Ihr Resultat von Teilaufgaben 10.1a) und 10.1b) in PYTHON.

Hinweis: `w,V = numpy.linalg.eig(C)` gibt die Eigenwerte der Matrix `C` im Array `w` und zugehörige Eigenvektoren in den Spalten von `V` zurück.

Aufgabe 10.2

Sei A die 3×3-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.2a) *(freiwillig!)* Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit Hilfe der PYTHON Funktion `numpy.linalg.eig`.

10.2b) *(freiwillig!)* Lösen Sie mit PYTHON das Eigenwertproblem für A^{-1}, A^2 und A^3. Was stellen Sie fest?

10.2c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$-Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x Folgendes gilt:

(i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k ($k \in \mathbb{N}$) und x ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 10.3

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.3a) Diagonalisieren Sie die Matrix, das heisst, bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

10.3b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Form $\dot{z} = az$ ist gegeben durch $z(t) = ce^{at}$ mit einer Konstanten c. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die Lösung $z(t) = ce^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z_0 = z(0) = c$ bestimmt werden kann.

10.3c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10.3d) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to +\infty$.

Aufgabe 10.4

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.4a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A.

10.4b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu A.

10.4c) Berechnen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A^4.

Aufgabe 10.5

10.5a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.5b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

10.5c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n.$$

10.5d) *(freiwillig!)* Prüfen Sie Teilaufgaben 10.5b) und 10.5c) mit PYTHON nach.

Hinweis: Benützen Sie `scipy.linalg.expm`

Aufgabe 10.6

Multiple Choice: Online abzugeben.

10.6a) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ definiere eine Abbildung $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, z \mapsto Az$. Dann gilt:

(i) A hat drei paarweise verschiedene Eigenwerte.

(ii) A hat keine Basis von Eigenvektoren.

(iii) Die geometrische Vielfachheit des kleinsten Eigenwertes von A ist 2.

(iv) Die algebraische Vielfachheit des grössten Eigenwertes von A ist 1.

(v) Die Menge der Eigenwerte von A und A^T ist gleich.

10.6b) Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige quadratische Matrizen A und B richtig?

(i) Ist A diagonalisierbar und invertierbar, so auch A^{-1}.

(ii) Ist A diagonalisierbar, so auch $A^\top$.

(iii) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch $A + B$ diagonalisierbar.

(iv) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch AB diagonalisierbar.

(v) Ist A diagonalisierbar, so auch A^2.

(vi) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat n verschiedene Eigenwerte, so gilt dies auch für A^2.

Abgabe:

Bis **9. Dezember**, 10:00 Uhr im Vorraum vor dem HG G 53.2.