Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 10

Aufgabe 10.1

10.1a) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix, das heisst, bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

Lösung: Entwicklung nach der dritten Zeile:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) =& \begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 & -5 \\ -2 & 9-\lambda & 5 \\ 1 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
=& 1\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 9-\lambda & 5 \end{vmatrix} - (-6)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\
=& -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = (\lambda+2)(-\lambda^2 + 8\lambda - 16) \overset{!}{=} 0,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung durch Erraten der Nullstelle $\lambda = -2$ und anschliessende Polynomdivision erfolgt. Es gilt also

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{-2} = 4.$$

Die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = -2$ ist 1, die von $\lambda = 4$ ist 2.

$\underline{\lambda = -2}$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & -5 & 0 \\ -2 & 11 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\to} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_2}{\to} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ x_3 \text{ frei}, x_2 = 5x_3,\ x_1 = 30x_3\ \Rightarrow\ E_{-2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit 1

$\underline{\lambda = 4}$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -5 & -5 & -5 & 0 \\ -2 & 5 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\to} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & -35 & -35 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_2}{\to} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\ x_3 \text{ frei}, x_2 = -x_3,\ x_1 = 0\ \Rightarrow\ E_4 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit $= 1 < 2 =$ algebraische Vielfachheit.

10.1b) Lösen Sie das Eigenwertproblem zu der folgenden Matrix:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung: Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -5 \\ 5 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= (-3-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + 10(-3-\lambda) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3$$

Suche nun die Nullstellen von $(3-\lambda)(1-\lambda)+10 = \lambda^2 - 4\lambda + 13 \Rightarrow \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$, wobei $i = \sqrt{-1}$.
Die algebraische Vielfachheit ist auch jeweils 1.

$\underline{\lambda_1 = -3}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & -13 & \frac{33}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_3 \text{ frei}, x_2 = \frac{33}{26}x_3,\ x_1 = -\frac{17}{13}x_3$$

$$\Rightarrow E_{-3} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -34 \\ 33 \\ 26 \end{bmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit 1

$\underline{\lambda_2 = 2 + 3i}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5-3i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-3i & -5 & 0 \\ 5 & 2 & -1-3i & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} -5-3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3i & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1-3i & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{(E)_2}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} -5-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1-3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_3 \text{ frei}, x_2 = \frac{1+3i}{2}x_3,\ x_1 = 0, \Rightarrow E_{2+3i} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1+3i \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit 1

Nach Bemerkung 2 auf Seite 149 im Buch wissen wir, dass, falls $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+3i \\ 2 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2 + 3i$ ist, gilt, dass $\overline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-3i \\ 2 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda_2} = 2 - 3i$ $(= \lambda_3)$ ist.

$$\Rightarrow E_{2-3i} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1-3i \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

10.1c) *(freiwillig!)* Überprüfen Sie Ihr Resultat von Teilaufgaben 10.1a) und 10.1b) in PYTHON.

Hinweis: `w,V = numpy.linalg.eig(C)` gibt die Eigenwerte der Matrix `C` im Array `w` und zugehörige Eigenvektoren in den Spalten von `V` zurück.

Lösung:

```
import numpy as np
import numpy.linalg as la

A=np.array([[-1,-5,-5],[-2,9,5],[1,-6,-2]])

B=np.array([[-3,0,0],[2,3,-5],[5,2,1]])

[v1,d1]=la.eig(A) #the function eig returns the array of eigenvalues
#(repeated according to algebraic multiplicity) and a matrix of eigenvectors
[v2,d2]=la.eig(B)

print("Eigenvalues of A:{0}\nEigenvectors of A:\n{1}\n{2}\n{3}\n\
Eigenvalues of B:{4}\nEigenvectors of B:\n{5}\n{6}\n{7}".format(v1,\
d1[:,0],d1[:,1], d1[:,2],v2,d2[:,0], d2[:,1], d2[:,2]))

#Eigenvalues of A:[-2.+0.00000000e+00j  4.+9.16506959e-08j  4.-9.16506959e-08j]
#Eigenvectors of A:
#[-0.98586117+0.j  -0.16431019+0.j  -0.03286204+0.j]
#[-3.71857225e-16-9.25811837e-09j  7.07106781e-01+9.25811837e-09j
#  -7.07106781e-01+0.00000000e+00j]
#[-3.71857225e-16+9.25811837e-09j  7.07106781e-01-9.25811837e-09j
#  -7.07106781e-01-0.00000000e+00j]
#Eigenvalues of B:[ 2.+3.j  2.-3.j  -3.+0.j]
#Eigenvectors of B:
#[0.         -0.j          0.84515425+0.j          0.16903085-0.50709255j]
#[0.         +0.j          0.84515425-0.j          0.16903085+0.50709255j]
#[ 0.62909052+0.j  -0.61058785+0.j  -0.48106922+0.j]
```

Die Resultate zeigen numerische Probleme bei der Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von A (Imaginäranteil). Für B stimmen die Eigenvektoren (bis auf eine Skalierung mit einer komplexen Zahl) überein; die Eigenwerte stimmen exakt überein.

Aufgabe 10.2

Sei A die 3×3-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.2a) *(freiwillig!)* Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit Hilfe der PYTHON Funktion `numpy.linalg.eig`.

Lösung: siehe nächste Teilaufgabe.

10.2b) *(freiwillig!)* Lösen Sie mit PYTHON das Eigenwertproblem für A^{-1}, A^2 und A^3. Was stellen Sie fest?

Lösung: Der folgende Code berechnet die Eigenwerte und Eigenvektoren von A^{-1}, A^2 und A^3.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as la
```

```
A=np.array([[-4,5,-5],[5,2,1],[-5,1,2]])

[v1,d1]=la.eig(A)
print("Eigenvalues of A:\n{0}\nEigenvectors of A:\n{1}\n{2}\n{3}"\
.format(v1,d1[:,0],d1[:,1], d1[:,2]))

p=[-1,2,3]
for i in p:
        [v1,d1]=la.eig(la.matrix_power(A,i))
        print("Eigenvalues of A^{0}:\
        \n{1}\nEigenvectors of A^{0}:\n{2}\n{3}\n{4}".format(i,v1,\
        d1[:,0],d1[:,1], d1[:,2]))
#Eigenvalues of A:
#[-9.  6.  3.]
#Eigenvectors of A:
#[-0.81649658  0.40824829 -0.40824829]
#[ 0.57735027  0.57735027 -0.57735027]
#[-8.72273588e-17  7.07106781e-01  7.07106781e-01]
#Eigenvalues of A^-1:
#[-0.11111111  0.16666667  0.33333333]
#Eigenvectors of A^-1:
#[-0.81649658  0.40824829 -0.40824829]
#[ 0.57735027  0.57735027 -0.57735027]
#[-4.90653893e-17  7.07106781e-01  7.07106781e-01]
#Eigenvalues of A^2:
#[81. 36.  9.]
#Eigenvectors of A^2:
#[ 0.81649658 -0.40824829  0.40824829]
#[-0.57735027 -0.57735027  0.57735027]
#[2.90757863e-17 7.07106781e-01 7.07106781e-01]
#Eigenvalues of A^3:
#[-729.  216.   27.]
#Eigenvectors of A^3:
#[ 0.81649658 -0.40824829  0.40824829]
#[-0.57735027 -0.57735027  0.57735027]
#[3.90499817e-17 7.07106781e-01 7.07106781e-01]
```

Man sieht, dass die Eigenvektoren von A^{-1}, A^2 und A^3 dieselben wie die von A sind (bis auf das Vorzeichen). Die Eigenwerte von A^k sind $(\lambda_i)^k$, wobei λ_i die Eigenwerte von A sind und $k \in \{-1, 2, 3\}$.

10.2c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$-Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x Folgendes gilt:

(i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k ($k \in \mathbb{N}$) und x ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

Lösung:

(i) Aus $Mx = \lambda x$ folgt

$$M^k x = M^{k-1}(Mx) = \lambda M^{k-1}x = \lambda^2 M^{k-2}x = \cdots = \lambda^k x.$$

(ii) Wenn M invertierbar ist, dann ist $\lambda \neq 0$ und es gilt

$$Mx = \lambda x \Leftrightarrow x = \lambda M^{-1}x \Leftrightarrow (1/\lambda)x = M^{-1}x.$$

Aufgabe 10.3

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.3a) Diagonalisieren Sie die Matrix, das heisst, bestimmen Sie eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) = &\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda(1-\lambda) - 1) - 1(-\lambda) \\
&= -\lambda(-\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda(1+\lambda)(\lambda - 2) \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow\ &\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{-1} = \operatorname{span}&\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},\ E_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\},\ E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \\
\Rightarrow D = &\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

10.3b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, indem Sie die neuen Variablen $x(t) = T^{-1}y(t)$ einführen.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Form $\dot{z} = az$ ist gegeben durch $z(t) = ce^{at}$ mit einer Konstanten c. Zum Beispiel gilt für $a = -2$: Die Differentialgleichung $\dot{z} = -2z$ hat die Lösung $z(t) = ce^{-2t}$, wobei die Konstante c aus der Anfangsbedingung $z_0 = z(0) = c$ bestimmt werden kann.

Lösung: Der hier beschriebene Lösungsweg entspricht der Transformationsmethode (siehe Buch S. 179ff): Aus $\dot{y} = TDT^{-1}y$ folgt durch Multiplikation von links mit T^{-1}:

$$\dot{x} = T^{-1}\dot{y} = T^{-1}TDT^{-1}y = Dx$$

Also gilt $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$ mit der Lösung

$$x_i(t) = c_i\, e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& y(t) = Tx(t) \\
\Rightarrow\ & y(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

10.3c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = y(0) = Tx(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Gausselimination:

$$
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]
\overset{(E)_1}{\rightarrow}
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right]
\overset{(E)_2}{\rightarrow}
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2.5 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ & c_3 = \frac{5}{6},\ c_2 = \frac{1}{2}, c_1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\
\Rightarrow\ & y(t) = -\frac{1}{3} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{5}{6} e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

10.3d) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to +\infty$.

Lösung: Grenzwertbetrachtung: wenn $t \to \infty$, folgt (für $c_3 \neq 0$):
$x_1(t) \to 0,\ x_2(t) \to c_2,\ x_3(t) \to \pm\infty$.
Damit $\lim_{t\to\infty} y_i(t) = 0$ für $i = 1, 2, 3$ gilt, muss auch $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0,\ i = 1, 2, 3$ gelten, also $c_2 = c_3 = 0$ und c_1 beliebig.

$$x(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}.\ \Rightarrow\ y(0) = Tx(0) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 10.4

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.4a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A.

10.4b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu A.

10.4c) Berechnen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A^4.

Lösung: **a)** A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Dazugehörige Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

b) Da A symmetrisch ist und die Eigenwerte verschieden sind, müssen die Eigenvektoren aus a) nur normiert werden, da sie bereits orthogonal sein müssen. Somit ist

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

eine orthonormale Eigenbasis zu A.

c) Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann gilt

$$A^4v = A^3(Av) = A^3(\lambda v) = \lambda A^3 v = \dots \lambda^4 v.$$

A^4 hat also die Eigenwerte $\lambda_1^4 = 0$, $\lambda_2^4 = 81$ und $\lambda_3^4 = 1296$. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind die gleichen wie für A, also $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 10.5

10.5a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I_3) = &\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - 9(2-\lambda) \\ =&(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow\ \lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} =& \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \begin{cases} 5, \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Eigenvektoren: $\underline{\lambda_1 = 2}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_2 \text{ frei}, x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \text{ z.B. } v^{(1)} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2 = 5}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_3 \text{ frei}, x_2 = 0,\ x_1 = -x_3 \ \Rightarrow \text{ z.B. } v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_3 = -1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{(E)_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_3 \text{ frei}, x_2 = 0,\ x_1 = x_3 \ \Rightarrow \text{ z.B. } v^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

10.5b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

Lösung: C ist reell und symmetrisch, also gilt nach Satz 7.7 ii), dass $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ und $v^{(3)}$ orthogonal aufeinander stehen, also $\langle v^{(1)}, v^{(2)} \rangle = \langle v^{(1)}, v^{(3)} \rangle = \langle v^{(2)}, v^{(3)} \rangle = 0$. Da $v^{(1)}$ bereits normiert ist, setze $e^{(1)} = v^{(1)}$. Normiere nun $v^{(2)}$ und $v^{(3)}$:

$$e^{(2)} = \frac{v^{(2)}}{\|v^{(2)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$e^{(3)} = \frac{v^{(3)}}{\|v^{(3)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

10.5c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n.$$

Lösung: Wir fassen die normierten Eigenvektoren in einer Matrix T zusammen:

$$T = [e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Damit erhalten wir $C = TDT^{-1}$, wobei $D = \operatorname{diag}(2, 5, -1)$. Da die Spalten von T ein Orthonormalsystem bilden, ist T orthogonal und folglich gilt $T^{-1} = T^T$.

Für die Matrixexponentialfunktion von $C = TDT^{-1}$ gilt allgemein (siehe Seite 163 im Buch):

$$\begin{aligned}
e^C &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (TDT^{-1})^n \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} TD^nT^{-1} \\
&= T\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} D^n\right) T^{-1} \\
&= Te^DT^{-1}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
e^C &= Te^DT^{-1} = T\,\mathrm{diag}(e^2, e^5, e^{-1})T^T \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e^2 & 0 \\ e^5/\sqrt{2} & 0 & -e^5/\sqrt{2} \\ e^{-1}/\sqrt{2} & 0 & e^{-1}/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (e^5 + e^{-1})/2 & 0 & (-e^5 + e^{-1})/2 \\ 0 & e^2 & 0 \\ (-e^5 + e^{-1})/2 & 0 & (e^5 + e^{-1})/2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

10.5d) *(freiwillig!)* Prüfen Sie Teilaufgaben 10.5b) und 10.5c) mit PYTHON nach.

Hinweis: Benützen Sie `scipy.linalg.expm`

Lösung: Am einfachsten bekommt man die orthonormale Eigenbasis mit dem Befehl `numpy.linalg.eigh`. Alternativ kann man die orthonormale Eigenbasis auch erhalten, indem man zuerst die Funktion `numpy.linalg.eig` verwendet und dann die QR–Zerlegung der Eigenvektoren-Matrix betrachtet. Sei $V = \left[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\right]$ die Eigenvektoren-Matrix und $V = QR$. Die Spalten von Q liefern eine orthonormale Eigenbasis von C. Die Matrixexponentialfunktion kann man analog wie von Hand oder mit der PYTHON-Funktion `scipy.linalg.expm` berechnen.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as la

C=[[2,0,-3],[0,2,0],[-3,0,2]]

[v1,d1]=la.eigh(C) #eigh is defined on real symmetric and complex
#hermitian matrices; its output is the array of eigenvalues and a
#unitary matrix of eigenvectors

#alternative method:
#[v1,d1]=la.eig(C)
#[d1,R]=la.qr(d1)
#If some eigenspace of C is multidimensional, d1 is not guaranteed to
#be orthogonal, hence we need to perform a QR-decomposition.
```

```
print("Orthonormal basis of eigenvectors of C:\n{0}\n{1}\n{2}".format(\
d1[:,0],d1[:,1],d1[:,2]))
print("\nExponential:\n{0}".format(d1@np.diag(np.exp([v1[0],v1[1],\
v1[2]]))@np.transpose(d1)))

#Orthonormal basis of eigenvectors of C:
#[-0.70710678  0.          -0.70710678]
#[0. 1. 0.]
#[-0.70710678  0.           0.70710678]
#
#Exponential:
#[[ 74.39051927   0.         -74.02263983]
# [  0.           7.3890561    0.        ]
# [-74.02263983   0.          74.39051927]]
```

Wir sehen, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

Aufgabe 10.6

Multiple Choice: Online abzugeben.

10.6a) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ definiere eine Abbildung $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, z \mapsto Az$. Dann gilt:

$\surd$ (i) A hat drei paarweise verschiedene Eigenwerte.

(ii) A hat keine Basis von Eigenvektoren.

(iii) Die geometrische Vielfachheit des kleinsten Eigenwertes von A ist 2.

$\surd$ (iv) Die algebraische Vielfachheit des grössten Eigenwertes von A ist 1.

$\surd$ (v) Die Menge der Eigenwerte von A und A^T ist gleich.

Die Eigenwerte von A sind gegeben durch

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda) \overset{!}{=} 0.$$

Die Eigenwerte sind somit 1, 4 und 6 und paarweise verschieden (allgemein sind die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix genau die Diagonaleinträge). Daher haben alle Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1 und auch geometrische Vielfachheit 1 (letzteres weil die geometrische Vielfachheit mindestens 1 und kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit ist). Insbesondere ist die Summe der geometrischen Vielfachheiten gleich 3, weshalb A eine Basis von Eigenvektoren hat. Somit sind die erste und vierte Aussage richtig, aber die zweite und dritte Aussage falsch. Die Eigenwerte von $A^\top$ sind die Nullstellen von

$$\det(A^\top - \lambda I_3).$$

Es gilt

$$\det(A^\top - \lambda I_3) = \det((A - \lambda I_3)^\top) = \det(A - \lambda I_3),$$

somit hat $A^\top$ die gleichen Eigenwerte wie A und die letzte Aussage ist richtig.

10.6b) Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige quadratische Matrizen A und B richtig?

$\surd$ (i) Ist A diagonalisierbar und invertierbar, so auch A^{-1}.

Wenn A diagonalisierbar und invertierbar ist, gibt es eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonal, wobei die Eigenwerte λ_i verschieden von 0 sind. Daraus folgt

$$T^{-1}A^{-1}T = (T^{-1}AT)^{-1} = D^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}),$$

die Inverse A^{-1} ist also auch diagonalisierbar. Wegen $(A^{-1})^{-1} = A$ ist sie auch invertierbar.

$\surd$ (ii) Ist A diagonalisierbar, so auch $A^\top$.

Wenn A diagonalisierbar ist, gibt es eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonal. Daraus folgt durch Transponieren

$$(T^\top)A^\top(T^\top)^{-1} = (T^{-1}AT)^\top = D^\top = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

die Transponierte $A^\top$ ist also auch diagonalisierbar.

(iii) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch $A + B$ diagonalisierbar.

Man betrachte zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Beide Matrizen haben die Eigenwerte 0 und 1 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 1 und sind daher diagonalisierbar. Ihre Summe $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat aber nur den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 und strikt kleinerer geometrischer Vielfachheit 1 (der zugehörige Eigenraum ist $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$). Daher ist $A + B$ nicht diagonalisierbar.

(iv) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch AB diagonalisierbar.

Man betrachte zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Beide Matrizen haben die Eigenwerte 0 und 1 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 1 und sind daher diagonalisierbar.
Ihr Produkt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat aber nur den Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit 2 und strikt kleinerer geometrischer Vielfachheit 1 (der zugehörige Eigenraum ist $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$). Daher ist AB nicht diagonalisierbar.

$\surd$ (v) Ist A diagonalisierbar, so auch A^2.

Ist A diagonalisierbar und es gibt eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonal, dann folgt

$$T^{-1}A^2T = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT) = D^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2),$$

das Quadrat A^2 ist also auch diagonalisierbar.

(vi) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat n verschiedene Eigenwerte, so gilt dies auch für A^2.

Man betrachte zum Beispiel $A = \operatorname{diag}(1, -1)$. Ihr Quadrat $A^2 = I_2$ hat den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2. Somit ist diese Aussage falsch.