Dr. V. Gradinaru
F. Jin

Herbstsemester 2022

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Serie 11

Aufgabe 11.1

11.1a) Geben Sie eine kurze Begründung, weshalb jede der folgenden Aussagen wahr ist:

(i) Jede positiv definite Matrix ist invertierbar.

(ii) Die einzige positiv definite Projektionsmatrix ist $P = I$ (die Einheitsmatrix). (Eine Projektionsmatrix ist definiert als eine quadratische Matrix, für welche $P^2 = P$.)

(iii) Eine diagonale Matrix mit positiven Diagonaleinträgen ist positiv definit.

(iv) Eine symmetrische Matrix mit positiver Determinante ist nicht unbedingt positiv definit.

11.1b) Testen Sie die folgenden Matrizen A und B auf positive Definitheit:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & b \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

11.1c) Finden Sie die (symmetrische) 3×3 Matrix A, sowie deren Pivotelemente, den Rang, die Eigenwerte und die Determinante, so dass gilt:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4(x_1 - x_2 + 2x_3)^2.$$

11.1d) Welche symmetrischen 3×3 Matrizen ergeben die folgenden quadratischen Formen?

(i)

$$x^T A x = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3)$$

Wieso ist A positiv definit?

(ii)

$$x^T B x = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3)$$

Wieso ist B positiv semidefinit?

Aufgabe 11.2

Für welche $s, t \in \mathbb{R}$ sind folgende Matrizen positiv definit?

$$\begin{bmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{bmatrix} t & 3 & 0 \\ 3 & t & 4 \\ 0 & 4 & t \end{bmatrix}$$

Hinweis: Es ist hinreichend, dass alle Eigenwerte positiv sind (wieso?). Die Nullstellen von $x^3 - 48x - 128$ sind $\{8, -4\}$.

Aufgabe 11.3

Zeichnen Sie die Ellipse in $\mathbb{R}^2$, die mit der Gleichung $x^2 + xy + y^2 = 1$ bestimmt ist. Finden Sie die dazu gehörenden Halbachsen.

Aufgabe 11.4 Eigenwerte und gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11.4a) A hat Eigenwerte

(i) -1 (ii) 1 (iii) i (iv) $-i$ (v) $1-i$

11.4b) Für das Differentialgleichungssystem

$$\dot{y}(t) = Ay(t)$$

gilt

(i) Für alle Anfangsbedingungen $y(0)$ bleibt die Lösung beschränkt für $t \to +\infty$.

(ii) Für alle Anfangsbedingungen $y(0) \neq 0$ geht $\|y(t)\| \to \infty$ für $t \to +\infty$.

(iii) Die Lösung ist periodisch für alle Anfangsbedingungen $y(0)$.

(iv) Es gibt Anfangsbedingungen $y(0) \neq 0$, für die die Lösung periodisch ist.

Aufgabe 11.5

11.5a) Reelle, symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

11.5b) Zu jeder reellen $n \times n$ Matrix A gibt es eine orthonormale Eigenbasis.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

11.5c) Für eine diagonalisierbare Matrix gilt für einen Eigenwert λ, dass

(i) algebraische Vielfachheit $<$ geometrische Vielfachheit

(ii) algebraische Vielfachheit $>$ geometrische Vielfachheit

(iii) algebraische Vielfachheit $=$ geometrische Vielfachheit

11.5d) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

11.5e) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

11.5f) Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

11.5g) Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenvektoren.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

Freiwillige Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe ist vollkommen *freiwillig* zu lösen. Sie ist ausschliesslich für diejenigen gedacht, die sich weitere Übungsaufgaben wünschen.

Aufgabe 11.6 Lineare Rekursion: Das Räuber-Beute-Modell

Eine Anwendung linearer Rekursionen ist die Vorhersage der dynamischen Entwicklung der Altersstruktur einer Population. Darüber hinaus sind lineare Rekursionen sehr wichtig für die mathematische Modellierung von Populationsdynamik, denn die natürlichen Rhythmen von Tag und Nacht und Jahreszeiten legen eine Entwicklung in Zeitschritten nahe.

Um qualitative und quantitative Vorhersagen aus solchen Modellen zu treffen, ist die Diagonalisierung der Rekursionsmatrix das entscheidende Hilfsmittel. Dieses Werkzeug stellt die lineare Algebra bereit.

Wir betrachten ein zeitdiskretes Räuber-Beute-Modell, welches repräsentiert wird durch die parameterabhängigen Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \frac{3}{5}p_k + \frac{1}{5}q_k \,, \\ q_{k+1} &= -\alpha p_k + \frac{6}{5}q_k \,, \end{aligned} \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0 \,, \tag{11.6.1}$$

wobei p_k die Population der Räuber und q_k die Population der Beute zum Zeitpunkt t_k darstellt, und in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\alpha \in [0,1]$. Offensichtlich impliziert das Modell (11.6.1)

- ein exponentielles Wachstum der Beutepopulation, wenn keine Räuber vorhanden sind (Koeffizient $\frac{6}{5}$),
- eine exponentielle Abnahme der Räuberpopulation, falls es keine Beutetiere gibt (Koeffizient $\frac{3}{5}$),
- ein reduziertes Wachstum oder sogar ein Schrumpfen der Beutepopulation in Gegenwart von vielen Räubern (Koeffizient $-\alpha$),
- eine weniger starke Abnahme oder sogar eine Zunahme der Räuberpopopulation, wenn viele Beutetiere vorhanden sind (Koeffizient $\frac{3}{5}$).

Zum Zeitpunkt t_0 seien die Anfangswerte gegeben durch $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$.

11.6a) Stellen Sie das Räuber-Beute Modell in der Form einer linearen Rekursion gemäss

$$x^{k+1} = Ax^k \tag{11.6.2}$$

dar, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $x^k \in \mathbb{R}^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

11.6b) Für welche(n) Wert(e) von α gibt es $\left[\begin{smallmatrix} p_0 \\ q_0 \end{smallmatrix}\right] \neq 0$ so, dass $p_k = p_0$ und $q_k = q_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$?

Hinweis: Natürlich muss man nur herausfinden, wann $p_1 = p_0$ und $q_1 = q_0$. Die Berechnung von Eigenwerten ist für diese Teilaufgabe nicht notwendig.

11.6c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in [0, \frac{9}{20})$.

11.6d) Analysieren Sie das Verhalten von (p_k, q_k) für $t_k \to \infty$ in Abhängigkeit des reellen Parameters $\alpha > 0$. Genauer, für welche Werte von $\alpha \in (0, \frac{9}{20})$ gilt $p_k^2 + q_k^2 < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Startwerte $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$?

Hinweis: Man hat die Beträge aller Eigenwerte der Rekursionsmatrix in Abhängigkeit vom Parameter zu inspizieren.

Abgabe:

Bis 16. Dezember, 10:00 Uhr im Vorraum vor dem HG G 53.2.