Dr. V. Gradinaru
F. Jin

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 11

Aufgabe 11.1

11.1a) Geben Sie eine kurze Begründung, weshalb jede der folgenden Aussagen wahr ist:

(i) Jede positiv definite Matrix ist invertierbar.

(ii) Die einzige positiv definite Projektionsmatrix ist $P = I$ (die Einheitsmatrix). (Eine Projektionsmatrix ist definiert als eine quadratische Matrix, für welche $P^2 = P$.)

(iii) Eine diagonale Matrix mit positiven Diagonaleinträgen ist positiv definit.

(iv) Eine symmetrische Matrix mit positiver Determinante ist nicht unbedingt positiv definit.

Lösung: (i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit. Ist $v \in \mathrm{Kern}(A)$ ein Vektor im Kern von A, d.h. für welchen $Av = 0$ gilt, so folgt insbesondere, dass $v^T Av = v^T 0 = 0$. Wegen der positiven Definitheit von A ist dies nur möglich, wenn $v = 0$. D.h. wenn $v \in \mathrm{Kern}(A)$ ist, dann ist $v = 0$. Somit ist $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$. Da A eine quadratische Matrix ist, ist A invertierbar.

(ii) Per Definition gilt $P^2 = P$ für eine Projektionsmatrix P. Ist P positiv definit, so ist P invertierbar gemäss Teilaufgabe (i). In diesem Fall ist trivialerweise $P = P^{-1}P^2$. Da P eine Projektionsmatrix ist, ist nun jedoch $P^2 = P$, so dass $P = P^{-1}P^2 = P^{-1}P = I$ die Einheitmatrix sein muss.

(iii) Sei A eine (reelle) diagonale $n\times n$ Matrix mit positiven Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Eine diagonale Matrix A ist offensichtlicherweise symmetrisch. Sei $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ nun ein beliebiger Vektor. Dann können wir schreiben:

$$v^T Av = v^T \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2.$$

Gemäss Annahme ist $\lambda_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Andererseits ist auch $v_i^2 \geq 0$ für alle i, und somit $\lambda_i v_i^2 \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Da alle Summanden nicht-negativ sind, folgt

$$v^T Av = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2 \geq 0, \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Dies zeigt, dass A positiv semidefinit ist. Ist nun v ein Vektor, so dass $v^T Av = 0$ ist, dann ist also $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2 = 0$. Da alle Summanden nicht-negativ sind, und da $\lambda_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, ist dies nur möglich, wenn $v_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt. D.h. es muss in diesem Fall $v = 0$ sein. Dies zeigt, dass aus $v^T Av = 0$ folgt, dass $v = 0$, und somit ist A positiv definit.

(iv) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ist symmetrisch mit Determinante $\det(A) = 1$. Allerdings ist $v^T Av = -|v|^2 < 0$ für alle $v \neq 0$, d.h. A ist nicht positiv definit.

11.1b) Testen Sie die folgenden Matrizen A und B auf positive Definitheit:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & b \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösung: Da die Matrizen symmetrisch sind, sind sie diagonalisierbar. Somit sind A und B positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte positiv sind (vgl. (iii) obiger Teilaufgabe). Da für die spezielle Wahl von $b = 0$ offensichtlich $B = A$ ist, betrachten wir im Folgenden von Anfang an B. Um die Eigenwerte zu berechnen, betrachten wir

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & b \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ b & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)^3 - b^2(2-\lambda) + 2b - 2(2-\lambda).$$

Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir $u := 2 - \lambda$, und suche Nullstellen von

$$\begin{aligned} u^3 - b^2 u + 2b - 2u &= (u^2 - b^2)u - 2(u-b) \\ &= u(u+b)(u-b) - 2(u-b) \\ &= [u(u+b) - 2](u-b). \end{aligned}$$

Es ist nun offensichtlich, dass wir eine Nullstelle für $u = b$, oder äquivalent für $\lambda = 2 - u = 2 - b$, erhalten. Also ist $\lambda_1 = 2 - b$ der erste Eigenwert von B. Um die beiden anderen Eigenwerte λ_2, λ_3 zu finden, müssen wir die Nullstellen von

$$u(u+b) - 2 = u^2 + bu - 2,$$

bestimmen. Diese berechnen sich mit der Mitternachtsformel, mit dem Resultat:

$$u_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-b \pm \sqrt{b^2+8}\right).$$

Da per Definition $\lambda = 2 - u$ ist, finden wir schliesslich die folgenden drei Eigenwerte von B:

$$\lambda_1 = 2 - b, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(4 + b - \sqrt{b^2+8}\right), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\left(4 + b + \sqrt{b^2+8}\right).$$

Der erste Eigenwert λ_1 ist genau dann positiv, wenn $b < 2$. Damit $\lambda_2 > 0$ gilt, muss $4 + b > \sqrt{b^2+8}$ sein. Da beide Seiten dieser Ungleichung positiv sind, ist dies genau dann der Fall, wenn $16 + 8b + b^2 = (4+b)^2 > b^2 + 8$ ist. Also genau dann, wenn $8(1+b) > 0$, d.h. $b > -1$ ist. Also muss zumindest $-1 < b < 2$ sein, damit B positiv definit ist. Nun ist jedoch offensichtlicherweise

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(4 + b + \sqrt{b^2+8}\right) \geq \frac{1}{2}(4+b),$$

und $\frac{1}{2}(4+b) > 3/2 > 0$, wenn $b > -1$. D.h. für $-1 < b < 2$ ist auch $\lambda_3 > 0$.

Zusammenfassend ist also B positiv definit, wenn $-1 < b < 2$. Ist $b \geq 2$, so ist $\lambda_1 \leq 0$ und folglich ist B nicht positiv definit. Ist $b \leq -1$, so ist $\lambda_2 \leq 0$, und damit ist B auch in diesem Falle nicht positiv definit. Demnach gilt:

$$B \text{ ist positiv definit} \iff -1 < b < 2.$$

Da A dem Spezialfall entspricht, in welchem $b = 0$ gesetzt wird, zeigt dies auch, dass A positiv definit ist.

11.1c) Finden Sie die (symmetrische) 3×3 Matrix A, sowie deren Pivotelemente, den Rang, die Eigenwerte und die Determinante, so dass gilt:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4(x_1 - x_2 + 2x_3)^2.$$

Lösung: Da A symmetrisch ist, ergibt die linke Seite:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 \\ &\quad + 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{13}x_1x_3 + 2A_{23}x_2x_3. \end{aligned}$$

Andererseits können wir die rechte Seite (die quadratische Form $Q(x)$, für $x = (x_1, x_2, x_3)^T$) ausmultiplizieren als

$$Q(x) := 4(x_1 - x_2 + 3x_3)^2 = 4(x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2).$$

Durch direkten Vergleich dieser beiden Ausdrücke liest man ab, dass

$$A = 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

ist.

Wir schauen uns die Pivotelemente der LR-Zerlegung von A an: Mit nur einem Schritt der LR-Zerlegung findet man sofort

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also ist das einzige nicht-verschwindende Pivotelement 1. Das liegt den Schluss nahe, dass A zwar nicht positiv definit (alle Pivotelemente müssten dafür > 0 sein), aber doch zumindest positiv semidefinit ist. Dass dies der Fall ist, sieht man z.B. an der quadratischen Form $x^TAx = Q(x) = 4(x_1 - x_2 + 2x_3)^2$. Diese ist offensichtlich ≥ 0 für alle $x \in \mathbb{R}^3$, d.h. A ist positiv semidefinit. Somit sind alle Eigenwerte von A nicht-negativ. Weiterhin liegen die Vektoren $u = (1, 1, 0)^T$ und $v = (0, 2, 1)^T$ im Kern von A, da für sie gilt: $u^TAu = v^TAv = 0$, wie man leicht durch Einsetzen von $x = u, v$ in $Q(x)$ sieht (dies lässt sich auch leicht an obigem Ausdruck für A überprüfen). Insbesondere sind also u und v Eigenvektoren zum Eigenwert 0. Wir wissen, dass die symmetrische Matrix A durch eine orthonormale Basis diagonalisiert werden kann. D.h. ein dritter Eigenvektor w, muss orthogonal zu u und v stehen, und somit (kollinear zu) $w = (1, -1, 2)^T$ sein. Offenbar ist

$$Aw = 4 \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} = 24w,$$

d.h. der dritte Eigenwert ist 24: Somit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, und $\lambda_3 = 24$. Für die Determinante ergibt sich $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$. Der Rang von A ist 1, da nur einer der Eigenwerte ungleich null ist.

11.1d) Welche symmetrischen 3×3 Matrizen ergeben die folgenden quadratischen Formen?

(i)

$$x^T A x = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3)$$

Wieso ist A positiv definit?

(ii)

$$x^T B x = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3)$$

Wieso ist B positiv semidefinit?

Lösung: Die Koeffizienten von A und B lassen sich wie in der vorherigen Teilaufgabe bestimmen.

(i) Die erste quadratische Form erhält man mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dass A positiv definit ist, sieht man z.B. indem man umschreibt in der Form

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3) \\ &= x_1^2 + x_3^2 + \underbrace{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2}_{=(x_1 - x_2)^2} + \underbrace{x_2^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2}_{=(x_2 - x_3)^2} \\ &= x_1^2 + x_3^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar, dass $x^T A x \geq 0$ für alle x ist, da alle Terme nicht-negativ sind. Ist $x^T A x = 0$, dann müssen alle Terme verschwinden, also ist in diesem Falle

$$x_1^2 = x_3^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_3)^2 = 0.$$

In einem ersten Schritt folgt daraus, dass $x_1 = x_3 = 0$ sein muss. In einem zweiten Schritt sieht man auch, dass dann $x_2^2 = (x_2 - x_3)^2 = 0$ ist, und somit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, oder $x = 0$. Es folgt also, dass A positiv definit ist, denn $x^T A x \geq 0$ für alle x und $x^T A x = 0$ impliziert $x = 0$.

(ii) Die zweite quadratische Form erhält man mit

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ähnlich wie oben lässt sich die quadratische Form schreiben als

$$\begin{aligned} x^T B x &= 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3) \\ &= \underbrace{x_1^2 - 2x_1 x_3 + x_3^2}_{=(x_1 - x_3)^2} + \underbrace{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2}_{=(x_1 - x_2)^2} + \underbrace{x_2^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2}_{=(x_2 - x_3)^2} \\ &= (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2, \end{aligned}$$

woraus man unmittelbar sieht, dass $x^T B x \geq 0$ für alle x ist.

Aufgabe 11.2

Für welche $s, t \in \mathbb{R}$ sind folgende Matrizen positiv definit?

$$\begin{bmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{bmatrix} t & 3 & 0 \\ 3 & t & 4 \\ 0 & 4 & t \end{bmatrix}$$

Hinweis: Es ist hinreichend, dass alle Eigenwerte positiv sind (wieso?). Die Nullstellen von $x^3 - 48x - 128$ sind $\{8, -4\}$.

Lösung: Da die Matrizen symmetrisch sind, sind sie positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Wir berechnen

$$\det\left(\begin{bmatrix} s-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & s-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & s-\lambda \end{bmatrix}\right) = (s-\lambda)^3 - 48(s-\lambda) - 128$$

und

$$\det\left(\begin{bmatrix} t-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & t-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & t-\lambda \end{bmatrix}\right) = (t-\lambda)^3 - 25(t-\lambda).$$

Der Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert genau dann, wenn die Determinante Null ist. Mit dem Hinweis, und da $\{0, 5, -5\}$ die Nullstellen von $x^3 - 25x$ sind, erhalten wir für feste $s, t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte

$$\{s-8, s+4\}, \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \{t, t-5, t+5\}.$$

Das heisst, die Matrizen sind positiv definit genau dann, wenn $s > 8$, beziehungsweise $t > 5$.

Aufgabe 11.3

Zeichnen Sie die Ellipse in $\mathbb{R}^2$, die mit der Gleichung $x^2 + xy + y^2 = 1$ bestimmt ist. Finden Sie die dazu gehörenden Halbachsen.

Lösung: Es gilt, dass

$$1 = x^2 + xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte kann man mit Hilfe der Determinante berechnen. Also

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - \tfrac{1}{4} = 0.$$

Die entsprechenden Eigenwerte sind $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Jetzt lösen wir noch die zwei Gleichungssysteme

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

um die dazugehörigen Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ zu finden. Wir erhalten

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Die Halbachsen sind

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Längen der Halbachsen sind $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \sqrt{2}$. Hier sehen wir, dass (**??**) gilt. Da wir aber noch ein Bild zeichnen möchten, berechnen wir noch die Koordinatentransformation. Nach obiger Rechnung gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Die Koordinatentransformation ist durch die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

bestimmt. Darum ist

$$\tilde{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \qquad \tilde{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y),$$

und

$$1 = \frac{3}{2}\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\tilde{y}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\tilde{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\tilde{y}\right)^2. \tag{11.3.1}$$

Damit können wir die Ellipse nun zeichnen, s. Abbildungen **??**, **??**, **??**.

Aufgabe 11.4 Eigenwerte und gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11.4a) A hat Eigenwerte

(i) -1 (ii) 1 ✓ (iii) i ✓ (iv) $-i$ ✓ (v) $1-i$

Lösung: Zum einen können die Eigenwerte wie üblich über das charakteristische Polynom berechnet werden. Zum anderen sehen wir direkt an der Blockstruktur der Matrix, dass A eine 90°-Drehung in der $x_1 \times x_2$-Ebene und die Identität entlang x_3 ist. Somit sind die Eigenwerte $\pm i$ und 1.

Abbildung 11.1: Ellipse in $\tilde{x}$, $\tilde{y}$-Koordinaten.

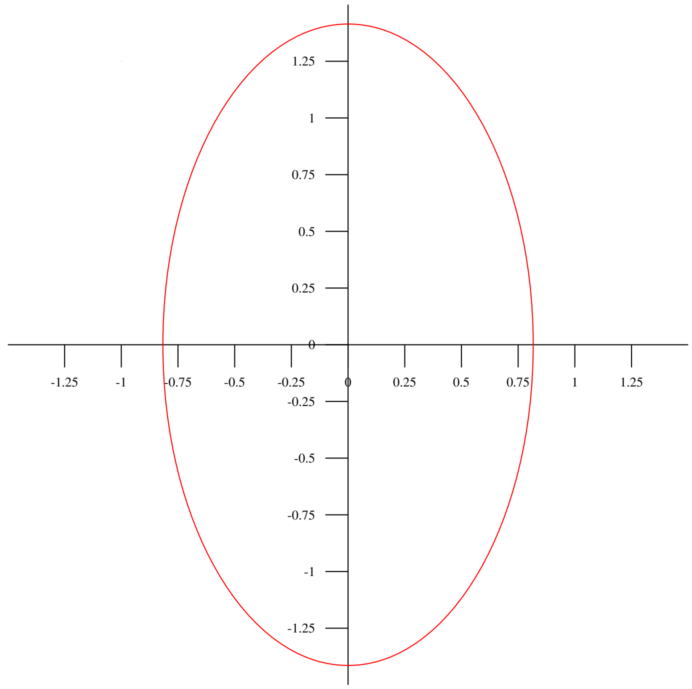


Abbildung 11.2: Ellipse in x, y-Koordinaten.

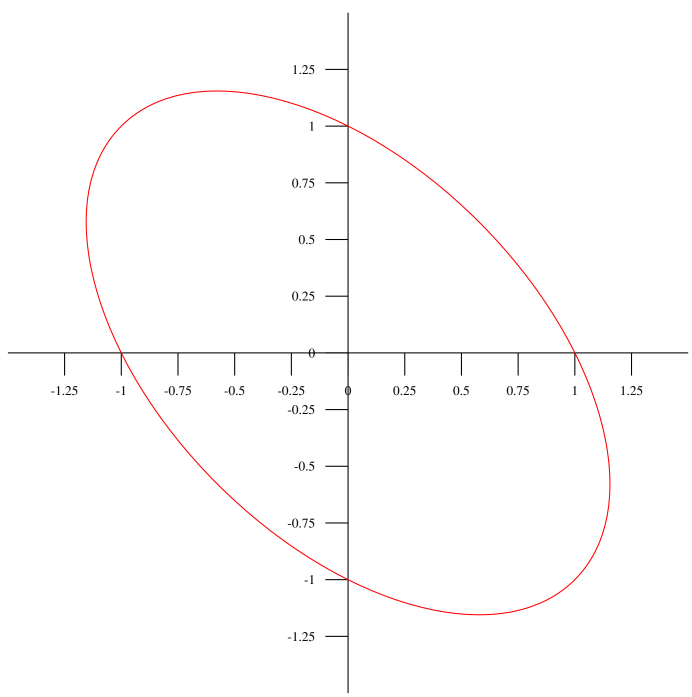
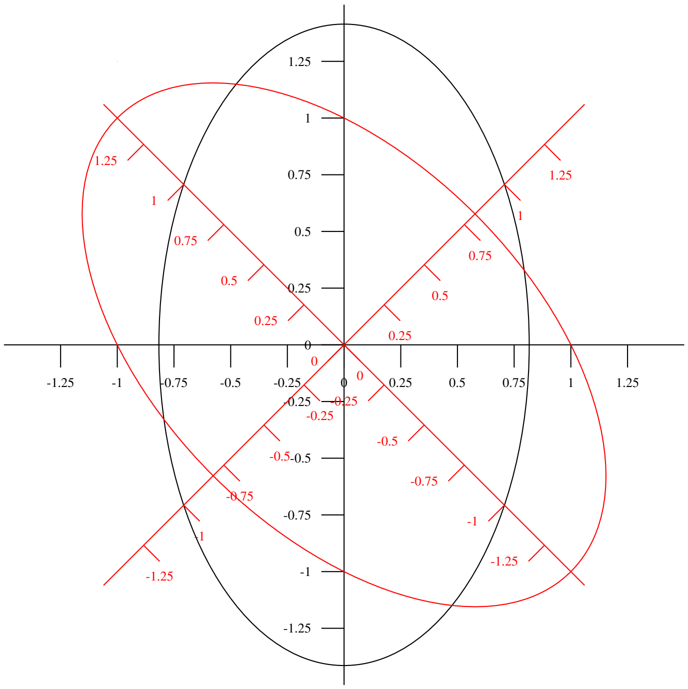


Abbildung 11.3: Koordinatentransformation.



11.4b) Für das Differentialgleichungssystem

$$\dot{y}(t) = Ay(t)$$

gilt

(i) Für alle Anfangsbedingungen $y(0)$ bleibt die Lösung beschränkt für $t \to +\infty$.

(ii) Für alle Anfangsbedingungen $y(0) \neq 0$ geht $\|y(t)\| \to \infty$ für $t \to +\infty$.

(iii) Die Lösung ist periodisch für alle Anfangsbedingungen $y(0)$.

√ (iv) Es gibt Anfangsbedingungen $y(0) \neq 0$, für die die Lösung periodisch ist.

Lösung: $A = SDS^{-1}$ lässt sich diagonalisieren mit $D = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $S = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Somit finden wir gemäss Skript Seite 158 die Lösung

$$y(t) = Se^{Dt}S^{-1}y(0) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} y(0).$$

Wir erhalten dann zum Beispiel für $y(0) = (0,0,1)^\top$ die unbeschränkte, aperiodische Lösung $y(t) = (0,0,e^t)^\top$. Für zum Beispiel $y(0) = (1,0,0)^\top$ erhalten wir die periodische, beschränkte Lösung $y(t) = (\cos t, -\sin t, 0)^\top$.

Aufgabe 11.5

11.5a) Reelle, symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.

$\surd$ (i) Richtig. (ii) Falsch.

Lösung: Richtig gem. Spektralsatz 7.3.0.6

11.5b) Zu jeder reellen $n \times n$ Matrix A gibt es eine orthonormale Eigenbasis.

(i) Richtig. $\surd$ (ii) Falsch.

Lösung: Falsch. Dies gilt nicht für allgemeine reelle $n \times n$ Matrizen. Es gilt jedoch für reelle, *symmetrische* Matrizen, gem. Spektralsatz 7.3.0.6.

11.5c) Für eine diagonalisierbare Matrix gilt für einen Eigenwert λ, dass

(i) algebraische Vielfachheit $<$ geometrische Vielfachheit

(ii) algebraische Vielfachheit $>$ geometrische Vielfachheit

$\surd$ (iii) algebraische Vielfachheit $=$ geometrische Vielfachheit

Lösung: Für allgemeine Matrizen gilt gem. Satz 7.2.0.19, dass algebraische Vielfachheit $\geq$ geometrische Vielfachheit. Bei diagonalisierbaren Matrizen gilt gem. Satz 7.2.0.26 die Gleichheit.

11.5d) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

$\surd$ (i) Richtig. (ii) Falsch.

Lösung: Richtig, gem. Satz 7.2.0.23.

11.5e) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(i) Richtig. $\surd$ (ii) Falsch.

Lösung: Falsch. Dies gilt nicht für allgemeine quadratische Matrizen. Es gilt jedoch für reelle, symmetrische Matrizen.

11.5f) Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.

$\surd$ (i) Richtig. (ii) Falsch.

Lösung: Richtig, gem. Satz 7.2 auf S. 148.

11.5g) Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenvektoren.

(i) Richtig. $\surd$ (ii) Falsch.

Lösung: Ist $B = T^{-1}AT$ und x Eigenvektor zum Eigenwert λ von A, so ist $y = T^{-1}x$ Eigenvektor zum selben Eigenwert λ von B:

$$By = T^{-1}ATT^{-1}x = T^{-1}Ax = T^{-1}\lambda x = \lambda y.$$

Für $T \neq I$ ist die Aussage also im Allgemeinen falsch.

Freiwillige Zusatzaufgabe

Die folgende Aufgabe ist vollkommen *freiwillig* zu lösen. Sie ist ausschliesslich für diejenigen gedacht, die sich weitere Übungsaufgaben wünschen.

Aufgabe 11.6 Lineare Rekursion: Das Räuber-Beute-Modell

Eine Anwendung linearer Rekursionen ist die Vorhersage der dynamischen Entwicklung der Altersstruktur einer Population. Darüber hinaus sind lineare Rekursionen sehr wichtig für die mathematische Modellierung von Populationsdynamik, denn die natürlichen Rhythmen von Tag und Nacht und Jahreszeiten legen eine Entwicklung in Zeitschritten nahe.

Um qualitative und quantitative Vorhersagen aus solchen Modellen zu treffen, ist die Diagonalisierung der Rekursionsmatrix das entscheidende Hilfsmittel. Dieses Werkzeug stellt die lineare Algebra bereit.

Wir betrachten ein zeitdiskretes Räuber-Beute-Modell, welches repräsentiert wird durch die parameterabhängigen Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \frac{3}{5}p_k + \frac{1}{5}q_k\,, \\ q_{k+1} &= -\alpha p_k + \frac{6}{5}q_k\,, \end{aligned} \quad, \quad k \in \mathbb{N}_0\,, \tag{11.6.1}$$

wobei p_k die Population der Räuber und q_k die Population der Beute zum Zeitpunkt t_k darstellt, und in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\alpha \in [0, 1]$. Offensichtlich impliziert das Modell (11.6.1)

- ein exponentielles Wachstum der Beutepopulation, wenn keine Räuber vorhanden sind (Koeffizient $\frac{6}{5}$),
- eine exponentielle Abnahme der Räuberpopulation, falls es keine Beutetiere gibt (Koeffizient $\frac{3}{5}$),
- ein reduziertes Wachstum oder sogar ein Schrumpfen der Beutepopulation in Gegenwart von vielen Räubern (Koeffizient $-\alpha$),
- eine weniger starke Abnahme oder sogar eine Zunahme der Räuberpopopulation, wenn viele Beutetiere vorhanden sind (Koeffizient $\frac{3}{5}$).

Zum Zeitpunkt t_0 seien die Anfangswerte gegeben durch $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$.

11.6a) Stellen Sie das Räuber-Beute Modell in der Form einer linearen Rekursion gemäss

$$x^{k+1} = Ax^k \tag{11.6.2}$$

dar, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $x^k \in \mathbb{R}^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir definieren $x^k := \left[\begin{smallmatrix} p_k \\ q_k \end{smallmatrix}\right]$. Somit erhalten wir aus (11.6.1)

$$x^{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\alpha & \frac{6}{5} \end{bmatrix}}_{=:A} x^k\,. \tag{11.6.3}$$

11.6b) Für welche(n) Wert(e) von α gibt es $\left[\begin{smallmatrix} p_0 \\ q_0 \end{smallmatrix}\right] \neq 0$ so, dass $p_k = p_0$ und $q_k = q_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$?

Hinweis: Natürlich muss man nur herausfinden, wann $p_1 = p_0$ und $q_1 = q_0$. Die Berechnung von Eigenwerten ist für diese Teilaufgabe nicht notwendig.

Lösung: Wir betrachten die Gleichung (11.6.2) für $k = 0$ und setzen dort die Bedingungen $p_1 = p_0$ und $q_1 = q_0$ ein:

$$\begin{aligned} x^0 &= Ax^0\,. \\ \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\alpha & \frac{1}{5} \end{bmatrix} x^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2-5\alpha \end{bmatrix} x^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wir erhalten folglich eine nichttriviale Lösung, falls $2 - 5\alpha = 0$ gilt, beziehungsweise $\alpha = \frac{2}{5}$. Für dieses α bleibt die Folge $\{(p_k, q_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ konstant.

11.6c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in [0, \frac{9}{20})$.

Lösung: Wir berechnen die Eigenwerte von A, indem wir das charakteristische Polynom von A berechnen und dessen Nullstellen bestimmen.

$$p_A(\lambda) := \det\left(A - \lambda I_n\right) = \det \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \lambda & \frac{1}{5} \\ -\alpha & \frac{6}{5} - \lambda \end{bmatrix} = \left(\frac{3}{5} - \lambda\right)\left(\frac{6}{5} - \lambda\right) + \frac{\alpha}{5} = \lambda^2 - \frac{9}{5}\lambda + \frac{18+5\alpha}{25}\,.$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A, $p_A(\lambda)$. Sie lauten

$$\lambda_{1,2} = \frac{9}{10} \pm \frac{\sqrt{\frac{81}{25} - \frac{72+20\alpha}{25}}}{2} = \frac{9}{10} \pm \frac{\sqrt{9-20\alpha}}{10}\,. \tag{11.6.4}$$

11.6d) Analysieren Sie das Verhalten von (p_k, q_k) für $t_k \to \infty$ in Abhängigkeit des reellen Parameters $\alpha > 0$. Genauer, für welche Werte von $\alpha \in (0, \frac{9}{20})$ gilt $p_k^2 + q_k^2 < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Startwerte $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^2$?

Hinweis: Man hat die Beträge aller Eigenwerte der Rekursionsmatrix in Abhängigkeit vom Parameter zu inspizieren.

Lösung: Wir betrachten die Diskriminante in (**??**). Für $\alpha \in [0, \frac{9}{20})$ gilt, dass $D = 9 - 20\alpha > 0$. Somit sind die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A immer reell und verschieden voneinander. Die Folge $x^k = \left[\begin{smallmatrix} p_k \\ q_k \end{smallmatrix}\right]$, beziehungsweise die Rekursion (**??**), lässt sich deshalb in der Eigenbasis zu den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \frac{9}{10} \pm \frac{\sqrt{9-20\alpha}}{10}$ darstellen.

Wir erhalten mithilfe der Basiswechselmatrix S die Darstellung der Rekursion in der Eigenbasis, $y^k = S^{-1}x^k$.

$$\underbrace{S^{-1}x^{k+1}}_{=:y^{k+1}} = S^{-1}Ax^k = S^{-1}A^kx^0 = S^{-1}\Big(SD^kS^{-1}\Big)x^0 = D^k\underbrace{S^{-1}x^0}_{=:y^0}\,.$$

$$y^{k+1} = D^ky^0\,.$$

Wir bemerken, dass diese Folge y^k genau dann beschränkt bleibt für alle y^0, sofern gilt $|\lambda_1| \leq 1$, $|\lambda_2| \leq 1$ (siehe Konvergenzkriterium für geometrische Folgen aus der Analysisvorlesung).

Wir erhalten

$$\begin{aligned} |\lambda_{1,2}| &\leq 1 \\ \Leftrightarrow\ -1 \leq \frac{9}{10} \pm \frac{\sqrt{9-20\alpha}}{10} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow\ -19 \leq \pm\sqrt{9-20\alpha} &\leq 1 \\ \Rightarrow\ 9-20\alpha &\leq 1 \\ \Rightarrow\ \alpha &\geq \frac{2}{5}\,, \end{aligned}$$

was aufgrund der Monotonizität von $\lambda_{1,2}$ in Abhängigkeit von α dazu führt, dass die Folge y^k (und somit auch x^k) beschränkt ist für alle $\alpha \in [\frac{2}{5}, \frac{9}{20})$, und divergiert für $\alpha \in [0, \frac{2}{5})$.