Dr. V. Gradinaru
F. Jin

Herbstsemester 2022

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Serie 12

Aufgabe 12.1

12.1a) Für $\phi \in [0, 2\pi]$ seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie jeweils eine Singulärwertzerlegung von A, B und C.

12.1b) *(freiwillig!)* Lösen Sie Teilaufgabe 12.1a) für $\phi = \frac{\pi}{4}$ mit PYTHON.

Hinweis: Um eine Singulärwertzerlegung zu berechnen, kann man die Funktion `numpy.linalg.svd` benutzen.

Aufgabe 12.2

Es sei die Fibonacci-Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12.2a) Bestimmen Sie die Eigenwerte (σ_1, σ_2) und Eigenvektoren der Länge eins zu den Matrizen $A^T A$ (Eigenvektoren u_1, u_2) und AA^T (Eigenvektoren v_1, v_2).

12.2b) Zeigen Sie, dass für eine geeignete Wahl der Eigenvektoren in der ersten Teilaufgabe $Av_1 = \sigma_1 u_1$ und $Av_2 = \sigma_2 u_2$ gilt.

Hinweis: Die folgende Gleichung könnte für Teil-Aufgabe b) von Nutzen sein:

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Aufgabe 12.3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.3a) Berechnen Sie AA^T, sowie deren Eigenwerte und Eigenvektoren mit Länge eins. Bestimmen Sie damit eine orthonormale Matrix U für die SVD-Zerlegung von A.

12.3b) Berechnen Sie $A^T A$, sowie deren Eigenwerte und Eigenvektoren mit Länge eins. Bestimmen Sie damit eine orthonormale Matrix V für die SVD-Zerlegung von A.

12.3c) Bestimmen Sie orthonormal Matrizen U, V und eine Matrix Σ, so dass $A = U\Sigma V^T$ ist. Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass das Produkt der drei Matrizen $U\Sigma V^T$ wieder A ergibt.

Aufgabe 12.4

12.4a) Es seien $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ Orthonormalbasen für den $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Matrix A, welche jeden Vektor $v_j \mapsto u_j$ abbildet; also so dass $Av_1 = u_1, \ldots, Av_n = u_n$ ist.

12.4b) Konstruieren Sie die Matrix A mit Rang eins, so dass $Av = 12u$ gilt, wobei $v = \frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^T$ und $u = \frac{1}{3}[2, 2, 1]^T$ seien. Bestimmen Sie auch die Singulär<u>werte</u> von A.

12.4c) Erklären Sie, wieso die Singulärwertzerlegung eine Matrix A als Summe von r Matrizen vom Rang eins darstellt:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T.$$

Aufgabe 12.5

12.5a) Es sei A eine symmetrische 2×2-Matrix mit den Eigenvektoren u_1 und u_2 (mit Länge eins). Welche Matrizen U, Σ und V^T erhalten Sie in der Singulärwertzerlegung, wenn die Eigenwerte von A $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ sind?

12.5b) Gilt $A = QR$ mit einer orthonormalen Matrix Q, so stimmt die Singulärwertzerlegung von A beinahe mit derjenigen von R überein. Welche der drei Matrizen ändert sich, wenn man von R zu $A = QR$ übergeht?

12.5c) Wie äussert es sich in der Singulärwertzerlegung, wenn man A durch $4A$ austauscht?

12.5d) Bestimmmen Sie die Singulärwertzerlegung von A^T und A^{-1}, gegeben der Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ einer Matrix A.

12.5e) Warum steht in der SVD von $A + I$ nicht einfach $\Sigma + I$?

Aufgabe 12.6

12.6a) Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung, lösen Sie das Ausgleichungsproblem

$$Ac = b,$$

für

$$A = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

12.6b) *(freiwillig!)* Lösen Sie **a)** mit PYTHON.

Aufgabe 12.7 Prüfungsaufgabe Sommer 2022

Sei die Matrix $\mathbf{A}$ gegeben durch ihre Singularwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T$ mit

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

12.7a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix $\mathbf{A}$?

12.7b) Schreiben Sie $\mathbf{A}$ als Summe von Rang-1-Matrizen; dabei sollten nicht mehr als 16 Zahlen (=Speicherplätze) verwendet werden.

12.7c) Geben Sie orthonormale Basen von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ und $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ an.

12.7d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 12.8

12.8a) $x^2 + xy + 3y^2$ ist eine quadratische Form.

(i) richtig

(ii) falsch

12.8b) $x^2 + y$ ist eine quadratische Form.

(i) richtig

(ii) falsch

12.8c) $2x_1x_2$ wird durch die Hauptachsentransformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$.

(i) richtig

(ii) falsch

12.8d) $2x_1x_2 = 1$ stellt eine Hyperbel dar.

(i) richtig

(ii) falsch

12.8e) $2x_1x_2$ ist eine positiv definite quadratische Form.

(i) richtig

(ii) falsch

Aufgabe 12.9

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix.

12.9a) Alle Eigenwerte von A sind reell.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

12.9b) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

12.9c) A ist diagonalisierbar.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

12.9d) Sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dann sind alle Eigenwerte von A reell.

(i) Richtig, (ii) Falsch.

Abgabe:

Bis 23. Dezember, 10:00 Uhr **per Scan an Ihren Assistierenden.** Die Korrektur erhalten Sie bis zum 6. Jan 2023 per Scan zurück. Die Serie zählt ebenfalls zum Bonus.