Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 12

Aufgabe 12.1

12.1a) Für $\phi \in [0, 2\pi]$ seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie jeweils eine Singulärwertzerlegung von A, B und C.

Lösung: Die Methode, die wir benutzen, folgt aus Satz 8.1.0.1. Sei A eine $m \times n$-Matrix (der Einfachheit halber nehmen wir $m \leq n$ an). Dann gibt es eine orthogonale $m \times m$-Matrix U, eine orthogonale $n \times n$-Matrix V und eine $m \times n$-Matrix S, so dass

$$A = USV^T,$$

wobei $S = [\hat{S} \mid 0]$ und $\hat{S} = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_m)$ eine diagonale $m \times m$-Matrix ist. Es folgt aus Satz 9.6 ii), dass die Zahlen s_i^2 die Eigenwerte von AA^T sind. Ausserdem erfüllen die Spalten $u^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, von U und die Spalten $v^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, von V, dass

$$\begin{aligned} Av^{(i)} &= s_i u^{(i)}, && i = 1, \ldots, m, \\ A^T u^{(i)} &= s_i v^{(i)}, && i = 1, \ldots, m, \\ Av^{(i)} &= 0, && i = m+1, \ldots, n, \text{ wenn } m < n. \end{aligned}$$

Für $i = 1, \ldots, m$ gilt

$$\begin{aligned} A^T A v^{(i)} &= s_i A^T u^{(i)} = s_i^2 v^{(i)}, \\ AA^T u^{(i)} &= s_i A v^{(i)} = s_i^2 u^{(i)}, \end{aligned}$$

und so sind $u^{(i)}$, respektive $v^{(i)}$, die Eigenvektoren von AA^T, respektive $A^T A$, für die Eigenwerte s_i^2. Wenn $m < n$, hat man $A^T A v^{(i)} = 0$ für $i = m+1, \ldots, n$ und dann sind die $v^{(i)}$ Eigenvektoren von $A^T A$ für den Eigenwert $\lambda = 0$.

Zusammenfassend gilt: Die Spalten von U bzw. V sind Eigenvektoren von AA^T bzw. $A^T A$.

Die obigen Überlegungen führen für $m \leq n$ zu folgendem Algorithmus zur Berechnung einer Singulärwertzerlegung:

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte s_i^2 (absteigend sortiert) und zugehörige (orthonormale) Eigenvektoren $u^{(i)}$ von $AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$;

(ii) Sei $1 \leq k \leq m$, so dass $s_i^2 > 0$ für $i = 1, \ldots, k$ und $s_i^2 = 0$ für $i = k+1, \ldots, m$

- Für $1 \leq i \leq k$: Berechnen Sie $v^{(i)} = \frac{1}{s_i} A^T u^{(i)}$;
- Für $k+1 \leq i \leq n$: $v^{(i)}$ sind (orthonormale) Eigenvektoren von $A^T A$ zum Eigenwert $\lambda = 0$.

Wenden wir uns nun den Matrizen aus der Aufgabenstellung zu.

(i) Um eine Singulärwertzerlegung von A zu berechnen, bestimmen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren von AA^T. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \det(AA^T - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 - 1 \\ &= (3-\lambda)(1-\lambda). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von AA^T sind dann $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$ und die zugehörige (normierten) Eigenvektoren sind

$$u^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ u^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenvektoren von $A^T A$ sind

$$v^{(1)} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ v^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ v^{(3)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es folgt dann, dass

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

eine Singulärwertzerlegung von A ist.

(ii) Da B quadratisch ist, kann man entweder die Eigenwerte von $B^T B$ oder BB^T berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \det(B^T B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 10-\lambda & 20 \\ 20 & 40-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (10-\lambda)(40-\lambda) - 400 = \lambda(\lambda - 50), \end{aligned}$$

und die Eigenwerte von $B^T B$ sind $\lambda_1 = 50$ und $\lambda_2 = 0$. Die zugehörige Eigenvektoren sind

$$v^{(1)} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ v^{(2)} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenvektoren von BB^T sind

$$u^{(1)} = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ u^{(2)} = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es folgt dann, dass

$$U = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} \sqrt{50} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ V = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

eine Singulärwertzerlegung von B ist.

(iii) Wir wissen, dass C orthogonal ist. Da $C^T C = CC^T = I$, sind alle Eigenwerte von $C^T C$ und CC^T gleich 1. Es folgt, dass $S = I$. Offensichtlich führt dann

$$U = C,\ V = I,$$

oder

$$U = I,\ V = C^T.$$

auf eine Singulärwertzerlegung von C. Man sieht daran auch, dass die Singulärwertzerlegung nicht eindeutig ist.

12.1b) *(freiwillig!)* Lösen Sie Teilaufgabe **??** für $\phi = \frac{\pi}{4}$ mit PYTHON.

Hinweis: Um eine Singulärwertzerlegung zu berechnen, kann man die Funktion `numpy.linalg.svd` benutzen.

Lösung: Eine Singulärwertzerlegung kann mit der Funktion `numpy.linalg.svd` berechnet werden. Es gilt:

```python
import numpy as np
import math

# Given A=USV^t, svd returns U, the sequence of diagonal elements of S
# and V^t. For future use, we develop here an SVD function which
# returns the original matrices, making use of linalg.svd

def SVD(A):
        [U,D,V] = np.linalg.svd(A)
        V=np.transpose(V)
        S=np.zeros(np.shape(A))
        for i in range(0,min(np.shape(A))):
                S[i,i]=D[i]
        return [U,S, V]

A = np.array([[1, 1, 0], [0 ,1, 1]])
[U,S,V] = SVD(A)
print("U:\n{0}\n S:\n{1}\nV:\n{2}\n".format(U,S,V))
```

```
U =
   -0.7071   -0.7071
   -0.7071    0.7071
S =
    1.7321         0         0
         0    1.0000         0
V =
   -0.4082   -0.7071    0.5774
   -0.8165    0.0000   -0.5774
   -0.4082    0.7071    0.5774
```

```python
B = np.array([[1, 2],[ 3, 6]])
[U,S,V] = SVD(B)
print("U:\n{0}\n S:\n{1}\nV:\n{2}\n".format(U,S,V))
```

```
U =
   -0.3162   -0.9487
   -0.9487    0.3162
S =
    7.0711         0
         0    0.0000
V =
```

```
   -0.4472   -0.8944
   -0.8944    0.4472
```

```
phi = math.pi/4
C = np.array([[math.cos(phi), 0, -math.sin(phi)] ,[0, 1, 0] , \
        [math.sin(phi), 0, math.cos(phi)]])
[U,S,V] = SVD(C)
```

```
U =
   -0.7071    0.7071         0
         0         0   -1.0000
   -0.7071   -0.7071         0
S =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
V =
    -1     0     0
     0     0    -1
     0    -1     0
```

Man sieht, dass hier noch eine andere Singulärwertzerlegung für C berechnet wird. Im Prinzip entspricht U der Matrix $-C$ und V der Matrix $-I$, aber die zweite und dritte Spalten sind jeweils vertauscht.

Aufgabe 12.2

Es sei die Fibonacci-Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12.2a) Bestimmen Sie die Eigenwerte (σ_1, σ_2) und Eigenvektoren der Länge eins zu den Matrizen $A^T A$ (Eigenvektoren u_1, u_2) und AA^T (Eigenvektoren v_1, v_2).

Lösung: Da A symmetrisch ist, gilt $A^T A = A^2 = AA^T$. Wir berechnen die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(\lambda I - A^T A) = (\lambda - 2)(\lambda - 1) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1.$$

Somit sind die Eigenwerte λ_+ und λ_- gegeben durch

$$\lambda_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Die dazu korrespondierenden Singulärwerte sind

$$\sigma_\pm = \sqrt{\lambda_\pm} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}.$$

In der letzten Gleichung haben wir den Hinweis benutzt, und haben das Vorzeichen so gewählt, dass beide Singulärwerte $\sigma_\pm \geq 0$ sind. Wie man leicht nachrechnet, sind zwei Eigenvektoren zu den beiden Eigenwerten gegeben durch

$$w_\pm = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Wir normalisieren diese, um eine Orthonormalbasis $u_\pm$ zu erhalten:

$$u_\pm = \frac{1}{\sqrt{2(5 \mp \sqrt{5})}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix},$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$u_+ = \frac{1}{\sqrt{2(5 - \sqrt{5})}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad u_- = \frac{1}{\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Wir haben nun etwas Freiheit in der Wahl der Vorzeichen der Vektoren u_1, u_2, v_1, v_2 (bspw. ist mit u_1 auch $-u_1$ ein Eigenvektor der Länge 1!). In Anbetracht der nächsten Teil-Aufgabe machen wir die folgende Wahl:

$$u_1 := u_+,\ u_2 := u_-, \quad v_1 := u_+,\ v_2 := -u_-.$$

Die zugehörigen Singulärwerte sind

$$\sigma_1 = \sigma_+ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \sigma_2 = \sigma_- = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

12.2b) Zeigen Sie, dass für eine geeignete Wahl der Eigenvektoren in der ersten Teilaufgabe $Av_1 = \sigma_1 u_1$ und $Av_2 = \sigma_2 u_2$ gilt.

Hinweis: Die folgende Gleichung könnte für Teil-Aufgabe b) von Nutzen sein:

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Lösung: Wir folgen weiterhin der Notation der Lösung von Teil-Aufgabe a). Wir berechnen

$$Au_\pm = \frac{1}{\sqrt{2(5 \mp \sqrt{5})}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(5 \mp \sqrt{5})}} \begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nun ist jedoch

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{1 \pm \sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{1 \pm \sqrt{5}} \frac{1 \mp \sqrt{5}}{1 \mp \sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4(1 \mp \sqrt{5})}{(1^2 - \sqrt{5}^2)} \end{pmatrix} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt nun, dass

$$Au_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_\pm.$$

Also, mit unserer Wahl von u_1, u_2, v_1, v_2:

$$Av_1 = Au_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_+ = \sigma_+ u_+ = \sigma_1 u_1,$$
$$Av_2 = -Au_- = \underbrace{\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}_{=\sigma_-} u_- = \sigma_- u_- = \sigma_2 u_2.$$

Die Matrix A hat also Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$, wobei

$$U = [u_1, u_2] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} & \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} & \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}-1 \end{pmatrix},$$

und

$$V = [v_1, v_2] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} & \frac{-2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.3a) Berechnen Sie AA^T, sowie deren Eigenwerte und Eigenvektoren mit Länge eins. Bestimmen Sie damit eine orthonormale Matrix U für die SVD-Zerlegung von A.

Lösung: Es ist

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Eigenwerte von AA^T berechnen wir das charakteristische Polynom:

$$\det(\lambda I - AA^T) = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Die Nullstellen (Eigenwerte) sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$.

Ist u_1 Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$, so muss $(AA^T - \lambda_1 I)u_1 = 0$ sein. Da

$$AA^T - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ist, ist ein (normalisierter) Eigenvektor gegeben durch

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ betrachten wir den Kern von

$$AA^T - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und finden den normalisierten Eigenvektor

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht auch sofort, dass $u_1^T u_2 = 0$ ist, so dass es sich um eine Orthonormalbasis handelt.

Die Singulärwerte sind also $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}$ und $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$.

12.3b) Berechnen Sie $A^T A$, sowie deren Eigenwerte und Eigenvektoren mit Länge eins. Bestimmen Sie damit eine orthonormale Matrix V für die SVD-Zerlegung von A.

Lösung: Es ist

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund von Teilaufgabe a) kennen wir bereits die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$. Da der Rang von $A^T A$ maximal zwei sein kann, ist $\lambda_3 = 0$.

Wiederum suchen wir normalisierte Eigenvektoren im Kern von $A^T A$. Für $\lambda_1 = 3$:

$$A^T A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

ergibt sich

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_2 = 1$:

$$A^T A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

finden wir

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Schlussendlich ergibt sich für $\lambda_3 = 0$:

$$A^T A - 0I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

der Eigenvektor

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12.3c) Bestimmen Sie orthonormal Matrizen U, V und eine Matrix Σ, so dass $A = U\Sigma V^T$ ist. Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass das Produkt der drei Matrizen $U\Sigma V^T$ wieder A ergibt.

Lösung: Wir prüfen erst einmal, dass die Vorzeichen der in Teilaufgabe b) berechneten Eigenvektoren konsistent mit den in Teilaufgabe a) bestimmten Eigenvektoren gewählt wurden. D.h. wir überprüfen, ob $Av_j = \sigma_j u_j$ ist für die obige Wahl von u_1, u_2, v_1, v_2 (die Vorzeichen kann man frei wählen, denn alle Kombinationen von $\pm u_1, \pm u_2, \pm v_1, \pm v_2, \pm v_3$ ergeben korrekte Eigenvektoren der beiden Matrizen AA^T und $A^T A$).

Nun berechnet man leicht

$$\begin{aligned}
Av_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \sqrt{3}u_1,\\
Av_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = u_2,\\
Av_3 &= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da die in Teilaufgabe a) berechneten Singulärwerte $\sigma_1 = \sqrt{3}$, $\sigma_2 = 1$ sind, haben wir $Av_1 = \sigma_1 u_1$ und $Av_2 = \sigma_2 u_2$, $Av_3 = 0$, wie gewünscht.

Es ist also $A = U\Sigma V^T$, mit

$$\begin{aligned}
U &= [u_1, u_2] = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\\
\Sigma &= \begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\\
V &= [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir prüfen das durch direkte Rechnung nach:

$$\begin{aligned}
U\Sigma V^T &= U\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\\
&= U\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= A.
\end{aligned}$$

Aufgabe 12.4

12.4a) Es seien $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ Orthonormalbasen für den $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Matrix A, welche jeden Vektor $v_j \mapsto u_j$ abbildet; also so dass $Av_1 = u_1, \ldots, Av_n = u_n$ ist.

Lösung: Sei $U = [u_1, \dots, u_n]$ und $V = [v_1, \dots, v_n]$. Die Matrix A ist gegeben durch

$$A = UV^T.$$

12.4b) Konstruieren Sie die Matrix A mit Rang eins, so dass $Av = 12u$ gilt, wobei $v = \frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^T$ und $u = \frac{1}{3}[2, 2, 1]^T$ seien. Bestimmen Sie auch die Singulär<u>werte</u> von A.

Lösung: Die Matrix ist gegeben durch

$$A = 12\frac{uv^T}{\|v\|^2}.$$

12.4c) Erklären Sie, wieso die Singulärwertzerlegung eine Matrix A als Summe von r Matrizen vom Rang eins darstellt:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_r u_r v_r^T.$$

Lösung: Sei A eine Matrix vom Rang r, und $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von A. Schreibe $U = [u_1, \dots, u_m]$ und $V = [v_1, \dots, v_n]$, wobei $u_1, \dots, u_m$ und $v_1, \dots, v_n$ Orthonormalbasen in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ sind. Dann gilt für $j \le r$:

$$Av_j = U\Sigma V^T v_j = U\Sigma \begin{pmatrix} v_1^T v_j \\ \vdots \\ v_n^T v_j \end{pmatrix} = U\Sigma e_j = U\sigma_j e_j = \sigma_j (Ue_j) = \sigma_j u_j,$$

wobei e_j der j-te Einheitsvektor ist

$$e_j = [0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0]^T,$$

und es wurde benutzt dass $v_i^T v_j = 0$, falls $i \ne j$, und $v_j^T v_j = 1$ (da $v_1, \dots, v_n$ eine Orthonormalbasis bilden). Ist hingegen $j > r$, so ist

$$Av_j = U\Sigma V^T v_j = U\Sigma e_j = U\,0 = 0.$$

Andererseits gilt ebenfalls:

$$\left(\sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T\right) v_j = \sum_{i=1}^r \sigma_i \underbrace{(v_i^T v_j)}_{= \delta_{ij}} u_i = \begin{cases} \sigma_j u_j, & (j \le r), \\ 0, & (j > r). \end{cases}$$

Somit stimmen die beiden Matrizen A und $\sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$ (als lineare Abbildungen betrachtet) mit ihren Werten auf der Basis $v_1, \dots, v_n$ überein. Daraus folgt, dass die beiden Matrizen identisch sein müssen. Also ist

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_r u_r v_r^T.$$

Aufgabe 12.5

12.5a) Es sei A eine symmetrische 2×2-Matrix mit den Eigenvektoren u_1 und u_2 (mit Länge eins). Welche Matrizen U, Σ und V^T erhalten Sie in der Singulärwertzerlegung, wenn die Eigenwerte von A $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ sind?

Lösung: Da A symmetrisch ist, gibt es eine <u>orthonormale</u> Matrix $U = [u_1, u_2]$, so dass $A = U\Lambda U^T$, wobei

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist. Wir definieren nun $v_1 = u_1$ und $v_2 = -u_2$, sowie $V = [v_1, v_2]$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

so dass $\sigma_1 = \lambda_1 > 0$ und $\sigma_2 = -\lambda_2 > 0$ sind.

Dann ist

$$\Lambda U^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^T \\ \lambda_2 u_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^T \\ (-\lambda_2)(-u_2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 v_1^T \\ \sigma_2 v_2^T \end{pmatrix} = \Sigma V^T.$$

Es folgt also, dass

$$A = U\Lambda U^T = U\Sigma V^T$$

ist. Da u_1, u_2 orthonormal waren, sind auch $v_1 = u_1$, $v_2 = -u_2$ orthonormal. Also ist U, Σ, V eine SVD Zerlegung von A.

12.5b) Gilt $A = QR$ mit einer orthonormalen Matrix Q, so stimmt die Singulärwertzerlegung von A beinahe mit derjenigen von R überein. Welche der drei Matrizen ändert sich, wenn man von R zu $A = QR$ übergeht?

Lösung: Sei $R = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^T$ eine Singulärwertzerlegung von R. Dann ist $A = QR = Q\tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^T$. Sei $U := Q\tilde{U}$, $\Sigma := \tilde{\Sigma}$ und $V := \tilde{V}$. Dann ist

$$A = U\Sigma V^T.$$

Weiterhin ist U eine orthonormale Matrix, da

$$U^T U = (Q\tilde{U})^T(Q\tilde{U}) = \tilde{U}^T \underbrace{Q^T Q}_{=I} \tilde{U} = \tilde{U}^T\tilde{U} = I.$$

Hier wurde benutzt, dass Q und $\tilde{U}$ orthonormale Matrizen sind.

12.5c) Wie äussert es sich in der Singulärwertzerlegung, wenn man A durch $4A$ austauscht?

Lösung: Sei $A = U\Sigma V^T$. Dann ist $4A = U(4\Sigma)V^T$. Also werden die Singulärwerte mit 4 multipliziert, wenn A durch $4A$ ausgetauscht wird.

12.5d) Bestimmmen Sie die Singulärwertzerlegung von A^T und A^{-1}, gegeben der Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ einer Matrix A.

Lösung: Sei $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung. Dann ist

$$A^T = (V^T)^T\Sigma^T U^T = V\Sigma U^T.$$

$A^T = V\Sigma U^T$ eine Singulärwertzerlegung von A^T.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn A quadratisch ist und alle Singulärwerte $\sigma_1, \ldots, \sigma_n > 0$ sind. Ist dies der Fall, so ist

$$\Sigma^{-1} = \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1}),$$

und $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$. Denn

$$A(V\Sigma^{-1}U^T) = (U\Sigma V^T)(V\Sigma^{-1}U^T) = U\Sigma V^T V\Sigma^{-1}U^T = U\Sigma\Sigma^{-1}U^T = UU^T = I,$$

womit gezeig ist, dass $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$.

12.5e) Warum steht in der SVD von $A + I$ nicht einfach $\Sigma + I$?

Lösung: Die Berechnung der Singulärwerte ist ein nicht-linearer Prozess. Für ein explizites Beispiel betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Singulärwerte $\sigma_1(A) = 1$ und $\sigma_2(A) = 0$. Hingegen sind die Singulärwerte von

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gegeben durch $\sigma_\pm = \sqrt{(3 \pm \sqrt{5})/2}$. Die Singulärwerte von $A + I$ sind also nicht um 1 verschieden von den Singulärwerten von A.

Aufgabe 12.6

12.6a) Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung, lösen Sie das Ausgleichungsproblem

$$Ac = b,$$

für

$$A = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Wir beschreiben zuerst wie man im Allgemeinen ein Ausgleichungsproblem mit einer Singulärwertzerlegung lösen kann. Sei A eine $m \times n$ Matrix mit $m > n$. Dann gibt es eine orthogonale $m \times m$ Matrix U, eine orthogonale $n \times n$ Matrix V und eine $m \times n$ Matrix S, so dass

$$A = USV^T.$$

Die Matrix S hat Diagonalgestalt, d.h.

$$S = \left[\frac{\hat{S}}{0} \right],$$

wobei $\hat{S}$ eine $n \times n$ diagonale Matrix ist. Mit $A = USV^T$, hat man

$$\begin{aligned} \|r\|_2^2 &= \|Ac - b\|_2^2 \\ &= \|USV^T c - b\|_2^2 \\ &= \|U(SV^T c - U^T b)\|_2^2 \\ &= \|SV^T c - d\|_2^2 \\ &= \|\hat{S}V^T c - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2, \end{aligned}$$

wobei wir den Vektor $d = U^T b$ wie folgt aufgeteilt haben:

$$d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}, \; d_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Dann lösen wir das lineare System $\hat{S}V^T c = d_0$ und es gilt

$$c = V\hat{S}^{-1} d_0.$$

Es folgt aus dem Beweis von Satz 8.1.0.1, dass die Spalten von V die Eigenvektoren von $A^T A$ sind. Man hat

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \det(A^T A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} \frac{4}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3}-\lambda & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{3}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 4-3\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 7-3\lambda & 4 \\ -2 & 4 & 7-3\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3^3}\left[(4-3\lambda)((7-3\lambda)^2-16)+2(-2(7-3\lambda)+8)-2(-8+2(7-3\lambda))\right] \\
&= \frac{1}{3^3}\left[-27\lambda^3+162\lambda^2-243\lambda+108\right] \\
&= -\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4 \\
&= (1-\lambda)^2(4-\lambda).
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von $A^T A$ sind dann $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ und die zugehörige Eigenvektoren sind

$$v^{(1)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ v^{(2)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ v^{(3)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenvektoren von AA^T sind

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ u^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ u^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann

$$d = U^T b = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

und da folgt

$$c = V\hat{S}^{-1}d_0 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

12.6b) *(freiwillig!)* Lösen Sie **a)** mit PYTHON.

Lösung:

Wie erklärt in Teil **a)**, man hat den folgenden Code.

```
import numpy as np
import math

def SVD(A):
        [U,D,V] = np.linalg.svd(A)
        V=np.transpose(V)
```

```
        S=np.zeros(np.shape(A))
        for i in range(0,min(np.shape(A))):
                S[i,i]=D[i]
        return [U,S, V]

A = np.array([[-4, 5, 2],  [0, 3, 6] , [2 ,2, -1]  ,[-2, -2, 1]])
A=(1/(3*math.sqrt(2)))*A
b = np.transpose([3,  6 , 3 , -3])

# Singulaerwertzerlegung von A
[U,S,V] = SVD(A)
S_hat = S[0:3,0:3]

d=np.transpose(U)@b
d_0 = d[0:3]
c=S_hat@d_0
c = V@(np.linalg.inv(S_hat)@d_0)
print(c)
```

```
c =

    3.1820
    4.2426
    2.1213
```

Aufgabe 12.7 Prüfungsaufgabe Sommer 2022

Sei die Matrix $\mathbf{A}$ gegeben durch ihre Singularwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ mit

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

12.7a) Was sind die Dimensionen, der Rang und die 2-Norm der Matrix $\mathbf{A}$?

Lösung: **(1.5 P)** $\mathbf{A}$ hat dieselben Dimensionen wie $\mathbf{\Sigma}$: 4×3 [0.5 Punkte]. Die Singulärwerte von $\mathbf{A}$ sind $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 2$, somit ist $\mathbf{A}$ vom Rang 2 [0.5 Punkte]. Die 2-Norm von $\mathbf{A}$ ist $\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{k=1,2} \sigma_k = 2$ [0.5 Punkte].

12.7b) Schreiben Sie $\mathbf{A}$ als Summe von Rang-1-Matrizen; dabei sollten nicht mehr als 16 Zahlen (=Speicherplätze) verwendet werden.

Lösung: **(1 P)** Seien $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3\ \mathbf{u}_4]$, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$. Die Matrix $\mathbf{A}$ hat zwei Singulärwerte. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T \\
&= 2\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\end{bmatrix} + 2\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix} \quad \text{[1 Punkt]}
\end{aligned}$$

eine Summe zweier Rang-1-Matrizen ist.

12.7c) Geben Sie orthonormale Basen von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ und $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ an.

Lösung: (1.5 P) Eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ ist gegeben durch

$$\{\mathbf{v}_3\}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}. \quad \text{[0.5 Punkte]}$$

Für $\mathrm{Bild}(A)$ ist eine Orthonormalbasis gegeben durch

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}. \quad \text{[1 Punkt]}$$

12.7d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\4\end{bmatrix}.$$

Lösung: (2 P) Wir schreiben die Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$ in Blockmatrizenform

$$\mathbf{A} = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2 \,|\, \mathbf{u}_3\ \mathbf{u}_4]\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$\boldsymbol{\Sigma}_2$}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \hline \mathbf{v}_3^T \end{array}\right] = [\mathbf{U}_1 \,|\, \mathbf{U}_2]\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$\boldsymbol{\Sigma}_2$}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{V}_1^T \\ \hline \mathbf{V}_2^T \end{array}\right].$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 &= \left\| [\mathbf{U}_1 \,|\, \mathbf{U}_2]\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Sigma}_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{V}_1^T \\ \hline \mathbf{V}_2^T \end{array}\right]\mathbf{x} - \mathbf{b} \right\|^2 \\
&= \left\| \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Sigma}_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{V}_1^T \\ \hline \mathbf{V}_2^T \end{array}\right]\mathbf{x} - \left[\begin{array}{c} \mathbf{U}_1^T \\ \hline \mathbf{U}_2^T \end{array}\right]\mathbf{b} \right\|^2 \\
&= \left\| \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\Sigma}_2 \mathbf{V}_1^T \mathbf{x} \\ \hline 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} \mathbf{U}_1^T \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{U}_2^T \mathbf{b} \end{array}\right] \right\|^2.
\end{aligned}$$

Die Minimierung des letzten Ausdrucks erfordert

$$\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{V}_1^T\mathbf{x} = \mathbf{U}_1^T\mathbf{b} \quad \text{[0.5 Punkte]} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{U}_1^T\mathbf{b}.$$

Hier ist

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{[0.5 Punkte]}$$

und

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_2^{-1}\mathbf{U}_1^T\mathbf{b} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{[1 Punkt]}
\end{aligned}$$

Aufgabe 12.8

12.8a) $x^2 + xy + 3y^2$ ist eine quadratische Form.

$\surd$ (i) richtig

(ii) falsch

Eine allgemeine quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$ ist von der Form

$$q_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto (x, y)^\top A(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

für eine symmetrische, reelle Matrix $A = (a_{ij})$. Die Abbildung $(x, y) \mapsto x^2 + xy + 3y^2$ ist von dieser Form für $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

12.8b) $x^2 + y$ ist eine quadratische Form.

(i) richtig

$\surd$ (ii) falsch

Die Abbildung $(x, y) \mapsto x^2 + y$ ist nicht von der Form aus der vorherigen Antwort. Somit ist sie keine quadratische Form.

12.8c) $2x_1x_2$ wird durch die Hauptachsentransformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$.

$\surd$ (i) richtig

(ii) falsch

Es gilt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)\right)^2 = 2x_1x_2.$$

Daher wird $2x_1x_2$ durch die Transformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$. Diese Transformation ist von der Form $y = Tx$ für die orthogonale Matrix $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (die Spalten bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$). Daher handelt es sich um eine Hauptachsentransformation.

12.8d) $2x_1x_2 = 1$ stellt eine Hyperbel dar.

$\surd$ (i) richtig

(ii) falsch

Nach der Hauptachsentransformation bei der vorherigen Aussage ist dieser Kegelschnitt durch $y_1^2 - y_2^2 = 1$ gegeben. Es handelt sich also tatsächlich um eine Hyperbel (mit den Asymptoten $y_1 = \pm y_2$).

12.8e) $2x_1x_2$ ist eine positiv definite quadratische Form.

(i) richtig

$\surd$ (ii) falsch

Wir haben bei der dritten Aussage gesehen, dass $2x_1x_2$ nach Hauptachsentransformation zu $y_1^2 - y_2^2$ wird. Diese quadratische Form nimmt daher sowohl positive wie auch negative Werte an. Sie ist also indefinit und insbesondere nicht positiv definit.

Aufgabe 12.9

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix.

12.9a) Alle Eigenwerte von A sind reell.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Folgt aus Satz 7.3.0.1.

12.9b) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Folgt direkt aus Satz 7.4.0.5, oder alternativ mit folgendem Beweis: Sei λ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{R}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Aus Satz 7.3.0.1 erhält man, dass $\lambda \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$0 < v^T A v = \lambda v^T v = \lambda \|v\|_2^2,$$

und da $\|v\|_2^2 > 0$, gilt $\lambda > 0$.

12.9c) A ist diagonalisierbar.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Folgt aus Satz 7.3.0.6.

12.9d) Sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dann sind alle Eigenwerte von A reell.

√ (i) Richtig, (ii) Falsch.

Lösung: Da A symmetrisch ist, folgt die Behauptung aus Satz 7.3.0.1.