

## Serie 12

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 23. Dezember um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2022/hs/401-0171-00L/>).

1. Betrachten Sie den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  der Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  mit der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Darin enthalten ist der Unterraum

$$P_2 := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, 2\}$$

der Polynome mit Grad  $\leq 2$ .

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (a)  $\text{span}\{x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1\}$  ist gleich  $P_2$ .
- (b)  $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$  sind linear unabhängig.
- (c)  $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$  bilden ein Erzeugendensystem von  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- (d)  $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$  bilden ein Erzeugendensystem von  $P_2$ .

2. Bestimmen Sie, ob

$$V = \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, 2, 3 \right\},$$

versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation  $\cdot$  gegeben durch

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}$$

und der Addition  $\oplus$ , definiert durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix},$$

ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.

### 3. Unterräume von $\mathbb{R}^3$

(a) Sei  $V$  die folgende Menge von Vektoren:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x - y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass  $V$  ein Unterraum des reellen Vektorraumes  $\mathbb{R}^3$  ist.

(b) Ist die Menge

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x - 1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

auch ein Unterraum von  $\mathbb{R}^3$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

### 4. Der Vektorraum $\mathbb{Z}_2^n$ über dem Körper $\mathbb{Z}_2$

(a) Die Menge  $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ , versehen mit den Rechenregeln

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \odot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

ist ein Körper. Das heisst, es gelten bezüglich Addition  $\oplus$  und Multiplikation  $\odot$  die selben Rechenregeln wie in  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{Q}$ . Versehen Sie

$$V = \mathbb{Z}_2^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbb{Z}_2 \text{ für } i = 1, 2, \dots, n\}$$

mit den passenden Vektoroperationen und zeigen Sie, dass  $V$  damit ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{Z}_2$  wird.

(b) Sei die Menge  $C$  gegeben durch

$$C = \{x \in \mathbb{Z}_2^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ ist gerade}\},$$

wobei  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ .

Zeigen Sie, dass  $C$  ein Unterraum von  $\mathbb{Z}_2^n$  ist.

*Bemerkung:*  $C$  ist ein sogenannter 1-fehlererkennender Code: Wird ein Bit einer Nachricht  $x \in C$  falsch übermittelt, kann der Empfänger dies feststellen (wie?) und die Wiederholung der Übermittlung veranlassen.