

Lösung Serie 1

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 7. Oktober um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2022/hs/401-0171-00L/>).

1. Gegeben sei das LGS (lineare Gleichungssystem)

$$\begin{array}{rcl} ax & + & y & = & a \\ x & + & ay & = & a \end{array}$$

Welche Aussagen treffen zu?

- (a) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.
- (b) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.
- (c) Für $a = -1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.
- (d) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
- (e) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau zwei Lösungen.

Lösung: Korrekt sind (a), (c) und (d), denn es gilt:

- ✓ (a) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.
Nach kurzer Rechnung folgt, dass $x = y = 2/3$ die einzige mögliche Lösung ist.
- (b) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.
Für $a = 1$ sind beide Gleichungen $x + y = 1$. Also hat man nur eine lineare Gleichung, und eine solche kann nicht gleichzeitig die Werte zweier Variablen fixieren.
- ✓ (c) Für $a = -1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.
Mit $a = -1$ erhalten wir die Gleichungen $-x + y = -1$ und $x - y = -1$. Multipliziert man die erste Gleichung beidseitig mit -1 (eine solche Operation lässt die Lösungsmenge natürlich unverändert) so erhalten wir, da $1 \neq -1$, das widersprüchliche Gleichungssystem: $x - y = 1$ und $x - y = -1$.

- ✓ (d) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
Für $a = 1$ ist jedes Paar $(x, y) = (\alpha, 1 - \alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Lösung des LGS.
- (e) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau zwei Lösungen.
*Ein LGS hat entweder **keine, genau eine** oder aber **unendlich viele** Lösungen.
 Achtung: Ein Paar (x, y) welches das LGS erfüllt zählt als **eine** Lösung, nicht etwa als zwei Lösungen.*

2. Man löse das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= b_2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= b_3 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

mit dem Gauss-Algorithmus für die folgenden Parameter:

- (a) $b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 2, b_4 = 2$;
 (b) $b_1 = 0, b_2 = -3, b_3 = 2, b_4 = 1$;
 (c) $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 1$.

Lösung: Mit dem Gauss-Algorithmus erhält man für (a), (b) und (c) schrittweise ein einfacheres Gleichungssystem:

x_1	x_2	x_3	x_4	(a)	(b)	(c)		x_1	x_2	x_3	x_4	(a)	(b)	(c)
1	1	2	2	1	0	1		1	1	2	2	1	0	1
1	2	3	4	3	-3	1	2.,3.,4. Zeile $\xrightarrow{-1. \text{ Zeile}}$	0	1	1	2	2	-3	0
1	3	6	10	2	2	1		0	2	4	8	1	2	0
1	4	10	20	2	1	1		0	3	8	18	1	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	(a)	(b)	(c)		x_1	x_2	x_3	x_4	(a)	(b)	(c)
	1	1	2	2	1	0	1		1	1	2	2	1	0	1
3. Zeile $\xrightarrow{-2 \times 2. \text{ Zeile}}$	0	1	1	2	2	-3	0	4. Zeile $\xrightarrow{-\frac{5}{2} \times 3. \text{ Zeile}}$	0	1	1	2	2	-3	0
4. Zeile $\xrightarrow{-3 \times 2. \text{ Zeile}}$	0	0	2	4	-3	8	0		0	0	2	4	-3	8	0
	0	0	5	12	-5	10	0		0	0	0	2	$\frac{5}{2}$	-10	0

Es folgt, indem man zuerst x_4 , dann x_3 , x_2 und x_1 ausrechnet:

(a) $x_4 = \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$,
 $x_3 = \frac{-3 - 4x_4}{2} = \frac{-3 - 4 \cdot \frac{5}{4}}{2} = -4$,
 $x_2 = 2 - 2x_4 - x_3 = 2 - 2 \cdot \frac{5}{4} - (-4) = \frac{7}{2}$,
 $x_1 = 1 - 2x_4 - 2x_3 - x_2 = 1 - 2 \cdot \frac{5}{4} - 2 \cdot (-4) - \frac{7}{2} = 3$;

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad x_4 &= \frac{-10}{2} = -5, \\
x_3 &= \frac{8-4x_4}{2} = \frac{8-4 \cdot (-5)}{2} = 14, \\
x_2 &= -3 - 2x_4 - x_3 = -3 - 2 \cdot (-5) - 14 = -7, \\
x_1 &= 0 - 2x_4 - 2x_3 - x_2 = 0 - 2 \cdot (-5) - 2 \cdot 14 - (-7) = -11;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(c)} \quad x_4 &= \frac{0}{2} = 0, \\
x_3 &= \frac{0-4x_4}{2} = \frac{0-4 \cdot 0}{2} = 0, \\
x_2 &= 0 - 2x_4 - x_3 = 0 - 2 \cdot 0 - 0 = 0, \\
x_1 &= 1 - 2x_4 - 2x_3 - x_2 = 1 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{r}
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\
x_1 + 3x_2 - x_3 = 2
\end{array}$$

Lösung: Mit dem Gauss-Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
3 & 4 & 2 & 8 \\
1 & 3 & -1 & 2
\end{array}
\begin{array}{l}
1. \text{ Zeile} \leftrightarrow 2. \text{ Zeile} \\
\longrightarrow
\end{array}
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
1 & 3 & -1 & 2 \\
3 & 4 & 2 & 8
\end{array}
\begin{array}{l}
2. \text{ Zeile} - 3 \times 1. \text{ Zeile} \\
\longrightarrow
\end{array}
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\
\hline
1 & 3 & -1 & 2 \\
0 & -5 & 5 & 2
\end{array}$$

Wir haben mehr Unbekannte als Gleichungen. In solchen Fällen gibt es entweder keine Lösung (wenn mehrere Gleichungen sich widersprechen, z.B. $x + y + z = 1$ und $x + y + z = 0$) oder unendlich viele.

Hier hat man unendlich viele Lösungen:

Für jede Wahl von x_3 kann man ein passendes x_2 finden, so dass $-5x_2 + 5x_3 = 2$ gilt.

Formell schreiben wir:

$x_3 = t \in \mathbb{R}$ (t ist ein sogenannter **freier Parameter**). Daraus folgt

$$x_2 = \frac{2 - 5x_3}{-5} = \frac{2 - 5t}{-5} = t - \frac{2}{5} \quad \text{und} \quad x_1 = 2 + x_3 - 3x_2 = 2 + t - 3 \left(t - \frac{2}{5} \right) = \frac{16}{5} - 2t.$$

Die **Lösungsmenge** L des Gleichungssystems ist also

$$L = \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{16}{5} - 2t \\ t - \frac{2}{5} \\ t \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

oder äquivalent dazu

$$L = \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{16}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{array} \right) + t \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Lösen Sie die Aufgaben **2** und **3** nochmals mit Hilfe von MATLAB.

Lösung: Der folgende Code löst die Aufgabe. % markiert kommentierte Zeilen, die also nicht ausgeführt werden. Jede Zeile ist mit Enter abzuschliessen/einzugeben.

```
% Aufgabe 2
A=[ 1 1 2 2 ;
    1 2 3 4 ;
    1 3 6 10;
    1 4 10 20]
b1=[1; 3 ; 2 ; 2 ]
b2=[0; -3; 2 ; 1 ] ;
x1=A\b1
x2=A\b2

% Aufgabe 3
C=[3 4 2;
    1 3 -1];
d=[8; 1];
x3=null(C,' r ')
% null(C) berechnet eine nichttriviale Loesung des entsprechenden
% homogenen Gleichungssystems; die Option ' r ' stellt sicher, dass
% die Loesung rational ist
x4=C\d
% Die allgemeine Loesung ist von der Form  $c*x3+x4$ , wobei  $c$  eine
% beliebige reelle Zahl ist.
```

5. (Fakultativ) Man zeige, dass zur Ausführung des Gauss-Verfahrens die Operation

(II) *Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile*

genügt.

Lösung: Man muss zeigen, dass man jede Operation vom Typ (I) - Zeilen vertauschen - durch eine Folge von Operationen vom Typ (II) ersetzen kann. Also angenommen man möchte die a -te und b -te Zeile vertauschen, dann kann man zum Beispiel wie folgt vorgehen:

Operation	Inhalt der a-ten Zeile	Inhalt der b-ten Zeile
Gegeben	X	Y
1. Zur b -ten Zeile die a -te Zeile hinzuaddieren	X	$X + Y$
2. Von der a -ten Zeile b -te Zeile subtrahieren	$-Y$	$X + Y$
3. Zur b -ten Zeile die a -te Zeile hinzuaddieren	$-Y$	X .

Bis auf das Vorzeichen in der a -ten Zeile haben wir die gewünschte Vertauschung erreicht. Da Vorzeichen beim Gauss-Verfahren keine Rolle spielen (Multiplikation einer Zeile mit ± 1),

ist diese Konfiguration äquivalent zu derjenigen, in der Y in der a -ten Zeile und X in der b -ten Zeile steht.