Lösung Serie 3

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 22. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01.

1. Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das LGS $Ax = b$ lösbar?

(a) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Für keine $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

(c) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

(d) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$.

(e) Das lässt sich nicht entscheiden.

Lösung: Korrekt ist nur (c), da:

(a) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Falsch. Z.B. existiert für keinen der drei Vektoren $b \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *eine Lösung.*

(b) Für keine $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Falsch. Für $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *existiert immer mindestens die Lösung* $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Eine andere Argumentation: Setzt man in $Ax = b$ *irgendetwas für* x *ein, so erhält man einen Vektor* b *für den dieses* x *eine Lösung ist.*

✓ (c) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

(d) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$.

Falsch. Nimmt man für b *den Nullvektor, so existiert mit* $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *eine Lösung, aber* $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ *wird durch die Ungleichung* $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$ *ausgeschlossen.*

(e) Das lässt sich nicht entscheiden.

Mit dem Gauss-Verfahren erhalten wir für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array} \xrightarrow{\text{2. Zeile}-\text{1. Zeile}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 4 & -3 & b_3 \end{array} \xrightarrow{\text{3. Zeile}+\text{2. Zeile}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -4 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array} \quad (*).$$

Also gibt es eine Lösung für alle b_1, b_2, b_3 *mit* $b_3 + b_2 - b_1 = 0$ *(aus der 3. Zeile von* $(*)$ *ersichtlich).*

2. *Ebenenschnitt*

(a) Für welche Werte von t schneiden sich die vier im untenstehenden Gleichungssystem gegebenen Ebenen im $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 2t \\ 2(x & - & y) & + & t(z+1) & = & 0. \end{array}$$

(b) Das folgende MATLAB-Skript visualisiert die Lösung des LGS
$x + y - z = 5,\ x - y - z = 0,\ 4x - z = 2.$

```
ezsurfc('x+y-5')
% plottet den Graphen der Funktion z=f(x,y)=x+y-5 (Sie koennen
% auch andere (zwei) Variabelnamen waehlen)
hold on
% hold dient dazu, alle Graphen in derselben Figur anzuordnen
% (Figur nicht schliessen waehrend dem Ausfuehren der Befehle)
ezsurfc('x-y')
ezsurfc('4*x-2')
hold off
```

Ändern Sie dieses Skript so ab, dass es für die im Teil **(a)** gefundenen Werte von t den Schnitt der vier Ebenen visualisiert.

Lösung:

(a) Das gegebene Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 2t \\ 2x & - & 2y & + & tz & = & -t. \end{array}$$

Der Schnitt der Ebenen entspricht der Lösungsmenge des Gleichungssystems in den Variablen x, y, z mit Parameter t. Mit dem Gaussverfahren erhalten wir (wobei Z für Zeile steht)

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2t \\ 2 & -2 & t & -t \end{array} \quad \underset{\text{3.Z=2.Z, 4.Z=4.Z}}{\xrightarrow{\text{1.Z=3.Z, 2.Z=1.Z}}} \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & t & -t \end{array} \quad \underset{\text{4.Z}-2\times\text{(1.Z)}}{\xrightarrow{\text{3.Z}-2\times\text{(1.Z)}}} \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4t \\ 0 & -4 & t & -5t \end{array}$$

$$\underset{\text{3.Z+4}\times\text{(2.Z)}}{\xrightarrow{\text{3.Z+3}\times\text{(2.Z)}}} \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4t \\ 0 & 0 & t+4 & -5t \end{array} \quad \xrightarrow{\text{4.Z}-\frac{t+4}{4}\times\text{(3.Z)}} \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4t \\ 0 & 0 & 0 & -5t - \frac{t+4}{4} \cdot (-4t) = t^2 - t = t(t-1) \end{array} \qquad (*)$$

Die Verträglichkeitsbedingung $t(t-1) = 0$ ist nur für $t = 0$ und $t = 1$ erfüllt.

Für $t = 0$ findet man durch Rückwärtseinsetzen:
$z = 0$ (aus der 3. Zeile von $(*)$: $4z = -4t$),
$y = 0$ (aus der 2. Zeile von $(*)$: $y = 0 - z$),
$x = 0$ (aus der 1. Zeile von$(*)$: $x = 2t - y$).

Für $t = 1$ findet man durch Rückwärtseinsetzen:
$z = -1$ (aus der 3. Zeile von $(*)$: $4z = -4t$),
$y = 1$ (aus der 2. Zeile von $(*)$: $y = 0 - z$),
$x = 1$ (aus der 1. Zeile von $(*)$: $x = 2t - y$).

Der Schnitt der Ebenen entspricht also in den Fällen $t = 0$ und $t = 1$ jeweils einem einzelnen Punkt $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

(b) Das folgende Matlab-Skript zeigt den Fall $t = 0$:

```
% t=0
ezsurfc('0*x-z')
% "0*x" steht nur da, damit die Achsenlabels automatisch korrekt sind
hold on
ezsurfc('2*x+z')
ezsurfc('-x+0*z')
ezsurfc('x+0*z')
hold off
```

3. *Multidimensionale Gleichungssysteme variabler Grösse*

(a) Lösen Sie für $n \geq 2$ das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} (i-k)x_i = 1 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

(b) Lösen Sie für $n \geq 1$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} &= 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \\ y_{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:

(a) Wir lösen das folgende Gleichungssystem
(x_i für $i = 1, 2, \ldots, n$ Spalten und $k = 1, 2, \ldots, n$ Zeilen):

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & n-2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & \ldots & n-3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -(n-1) & -(n-2) & -(n-3) & \ldots & 0 & 1 \end{array}$$

Wenn wir für $k = 2, 3, \ldots, n$ von der k-ten Zeile die $(k-1)$-te Zeile abziehen und die erste Zeile unverändert lassen, erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \\
\hline
0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0
\end{array}$$

Das Gleichungssystem ist also äquivalent zu (doppelte Zeilen streichen)

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \\
\hline
0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0
\end{array}$$

Das Gleichungssystem ist also äquivalent zu
(Multiplikation der 2. Zeile mit -1, Zeilen vertauschen)

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & 1
\end{array}$$

Die Lösungsmenge ist folglich

$$\begin{array}{rcl}
x_n & = & t_1 \ \text{(aus der 2. Zeile)} \\
x_{n-1} & = & t_2 \ \text{(aus der 2. Zeile)} \\
 & \vdots & \\
x_3 & = & t_{n-2} \ \text{(aus der 2. Zeile)} \\
x_2 & = & 1 - \sum_{i=1}^{n-2}(n-i)t_i \ \text{(aus der 2. Zeile)} \\
x_1 & = & -\sum_{i=2}^{n} x_i = -1 + \sum_{i=1}^{n-2}(n-i-1)t_i \ \text{(aus der 1. Zeile)}
\end{array}$$

für $t_1, t_2, \ldots, t_{n-2} \in \mathbb{R}$ beliebig.

(b) Wir lösen das folgende Gleichungssystem
(y_i für $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$ Spalten und $k = 1, 2, \ldots, n+2$ Zeilen):

$$\begin{array}{cccccccccc|c}
y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \ldots & y_n & y_{n+1} & & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & \ldots & & 0 & & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & & \ldots & & 0 & & 0 \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & \ldots & & 0 & & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & & \ldots & & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & & & 0 & 1 & -2 & 1 & & 0 \\
0 & 0 & \ldots & & & 0 & 0 & 0 & 1 & & 1
\end{array}$$

Um die Matrix auf Zeilenstufenform zu bringen, führen wir die folgenden n Schritte durch (nur die erste und letzte Zeile bleiben dabei unverändert):

1. Schritt: Wir ziehen die 1. Zeile von der 2. Zeile ab.

2. Schritt: Wir addieren die 2. Zeile der neuen Matrix zum 2-fachen der 3. Zeile.

k. Schritt: Wir addieren die k-te Zeile der neuen Matrix zum k-fachen der $(k+1)$-ten Zeile für $k = 3, 4, \dots, n$.

Somit erhalten wir die Matrix

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \dots & y_n & y_{n+1} & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 2 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 3 & & \dots & & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & & & 0 & 0 & -(n+1) & n & 0 \\
0 & 0 & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Nach Normieren der Zeilen (k. Zeile multipliziert mit $-\frac{1}{k}$ für $k = 2, 3, \dots, n+1$ und erste und letzte Zeile beibehalten) wird diese zu

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \dots & y_n & y_{n+1} & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & & \dots & & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & & & 0 & 0 & 1 & -\frac{n}{n+1} & 0 \\
0 & 0 & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
\qquad (*)
$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= 1 \quad \text{(aus der } (n+2)\text{-ten Zeile von } (*)) \\
y_n &= \frac{n}{n+1} \cdot y_{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad \text{(aus der } (n+1)\text{-ten Zeile von } (*)) \\
y_{n-1} &= \frac{n-1}{n} \cdot y_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \text{(aus der } n\text{-ten Zeile von } (*)) \\
y_{n-2} &= \frac{n-2}{n-1} \cdot y_{n-1} = \frac{n-2}{n+1} \quad \text{(aus der } (n-1)\text{-ten Zeile von } (*)) \\
&\vdots \\
y_k &= \frac{k}{k+1} \cdot y_{k+1} = \frac{k}{n+1} \quad \text{(aus der } (k+1)\text{-ten Zeile von } (*)) \\
&\vdots \\
y_2 &= \frac{2}{3} \cdot y_3 = \frac{2}{n+1} \quad \text{(aus der 3-ten Zeile von } (*)) \\
y_1 &= \frac{1}{2} \cdot y_2 = \frac{1}{n+1} \quad \text{(aus der 2-ten Zeile von } (*)) \\
y_0 &= 0 = \frac{0}{n+1} \quad \text{(aus der 1-ten Zeile von } (*))
\end{aligned}$$

oder allgemein

$$y_k = \frac{k}{n+1} \qquad \text{für} \qquad k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

4. *Numerische Problematik bei linearen Gleichungssystemen*

(a) Lösen Sie

$$\begin{pmatrix} 1044.005 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

(b) "Lösen" Sie mit einem gewöhnlichen Taschenrechner

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass jedes $\binom{x}{y}$, das zur Lösungsmenge beider Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gehört, auch eine Lösung von **(b)** ist und lösen Sie damit **(b)**.

Lösung:

(a) Offensichtlich lautet die Lösung $x = 0$, $y = 1$, da

$$\begin{pmatrix} 1044.005 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

(b) Mit dem Taschenrechner findet man die Lösung $x = 0$, $y = 1$ (oder je nach Taschenrechner zumindest eine Lösung mit relativ grossem Fehler). Beim Einsetzen ins Gleichungssystem sieht man jedoch, dass diese falsch ist, da

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0028 \\ 116.0005 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

Der Rundungsfehler ist zu gross!

(c) Falls

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gelten, gilt auch

$$\begin{aligned} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} + 10^{-4} \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \right]}_{=(*)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 10^{-4} \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix} + 10^{-4} \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}}_{=(**)} \end{aligned}$$

und somit (durch Ausrechnung von $(*)$ und $(**)$)

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ist $x = 2$, $y = -2$, da

$$\begin{aligned} 5 \times [45x + 28y = 34] - 28 \times [8x + 5y = 6] &\Longleftrightarrow [(225x - 224x) + (140y - 140y) = 170 - 168] \\ &\Longleftrightarrow x = 2 \\ &\Longrightarrow 5y = 6 - 8x = 6 - 8 \cdot 2 = -10 \\ &\Longleftrightarrow y = -2. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen sieht man, dass $x = 2$, $y = -2$ auch eine Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}$$

ist, da

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $x = 2$, $y = -2$ eine Lösung der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}$$

aus **(b)**. Da der Rang dieses LGS aus **(b)** gleich 2 ist (weil $\frac{174.0008}{1044.0045} \neq \frac{116.0005}{696.0028}$), ist diese Lösung eindeutig.