Lösung Serie 4

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 28. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link uber https://metaphor.ethz.ch/x/2022/hs/401-0171-00L/).

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $(AB)^T = A^T B^T$.

(b) $(AB)^T = B^T A^T$.

(c) $A^T A$ ist symmetrisch.

(d) AA^T ist symmetrisch.

(e) Ist C eine beliebige quadratische Matrix, so ist $C + C^T$ symmetrisch.

Lösung: Korrekt sind (b), (c), (d) und (e), da:

(a) $(AB)^T = A^T B^T$.
Die Formel $(AB)^T = A^T B^T$ ist im Allgemeinen falsch, so auch in diesem Beispiel. Nachrechnen zeigt:

$$\begin{aligned}(AB)^T &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 19 & 23 \\ 21 & 25 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 23 & 25 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -6 & 4 & -8 \\ 15 & 24 & 24 \\ 17 & 17 & 26 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = A^T B^T\end{aligned}$$

was schon von den Matrixdimensionen her keine Gleichheit sein kann. Aber auch für quadratische Matrizen A, B derselben Grösse ist die Formel im Allgemeinen falsch.

✓ (b) $(AB)^T = B^T A^T$.

Richtig! Diese Formel ist sogar im Allgemeinen richtig (sofern das Produkt AB definiert ist). Rechnung: $(AB)^T = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 23 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = B^T A^T$.

✓ (c) $A^T A$ ist symmetrisch.

Ja, es gilt allgemein: Ist A eine $m \times n$-Matrix, so ist $A^T A$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix, denn $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$. Und eine Matrix M ist per Definition genau dann symmetrisch, wenn $M^T = M$ gilt.

✓ (d) AA^T ist symmetrisch.

Ja, es gilt allgemein: Ist A eine $m \times n$-Matrix, so ist AA^T eine symmetrische $m \times m$-Matrix, denn $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$. Bemerkung: $A^T A$ und AA^T sind beide symmetrisch, aber im Allgemeinen nicht gleich (z.B. wenn $n \neq m$).

✓ (e) Ist C eine beliebige quadratische Matrix, so ist $C + C^T$ symmetrisch.

Ja, es gilt $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$.
Bemerkung: Wäre C nicht quadratisch, so wäre $C + C^T$ nicht definiert.

Bemerkung: Es gilt allgemein: $(AB)^T = B^T A^T$ falls A eine $m \times p$ und B eine $p \times n$-Matrix ist. Die Anzahl Spalten von A und die Anzahl Zeilen von B (beide gleich p) müssen übereinstimmen, damit AB definiert ist - das Produkt $B^T A^T$ ist dann automatisch auch definiert.
Es sei $C = AB$ und a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} bezeichnen die Einträge der jeweiligen Matrizen (der erste Index ist die Zeilennummer, der zweite die Spaltennummer). Weiter seien α_{ij}, β_{ij} die Einträge der Matrizen A^T, B^T. Aus der Definition der Transponierten folgt $\alpha_{ij} = a_{ji}$, $\beta_{ij} = b_{ji}$, und die Definition der Matrizenmultiplikation liefert

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Nun ist der (i,j)-te Eintrag der Matrix $(AB)^T$ gleich (beachte die vertauschten Indizes)

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{kj} \beta_{ik} = \sum_{k=1}^{p} \beta_{ik} \alpha_{kj}$$

und dieser Ausdruck entspricht auch dem (i,j)-ten Eintrag der Matrix $B^T A^T$.

2. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:

(i) AB (ii) BA (iii) Ax (iv) $A^2 := AA$
(v) $B^2 := BB$ (vi) $y^T x$ (vii) yx (viii) xy^T
(ix) $B^T y$ (x) $y^T B$.

(b) Lösen Sie (a) nochmals mit Hilfe von MATLAB.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\text{(i) } AB = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -21 \\ -9 & -1 \\ 12 & 17 \end{pmatrix},$$

$$\text{(iii) } Ax = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -26 \\ 16 \end{pmatrix},$$

$$\text{(iv) } A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -1 & -1 \\ -17 & 15 & -22 \\ -11 & -13 & 21 \end{pmatrix},$$

$$\text{(vi) } y^T x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -20,$$

$$\text{(viii) } xy^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 6 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix},$$

$$\text{(ix) } B^T y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{(x) } y^T B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixprodukte (ii) BA, (v) B^2 und (vii) yx sind aus Dimensionsgründen nicht definiert.

(b) Die Matrixmultiplikation mit MATLAB.

3. *Polynominterpolation*
Gegeben sind die Funktionswerte $y_0, y_1, \dots, y_n$ über den Abszissen $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Gesucht ist das interpolierende Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Es soll also gelten

$$p(x_i) = y_i \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq n.$$

(a) Man bestimme das Gleichungssystem für die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in Matrixschreibweise.

(b) Man bestimme das Interpolationspolynom für

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \qquad (n = 4).$$

(c) Man betrachte die Polynome

$$\ell_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Welche Werte nimmt ℓ_i in den Punkten x_k an? Man bestimme die Lösung von (b) mit Hilfe der Polynome ℓ_i (Lagrange'sche Interpolationsformel).

Lösung:

(a) Es soll gelten

$$\begin{array}{ccccccc} p(x_0) = & a_0 + & a_1 x_0 + & a_2 x_0^2 + & \ldots + & a_n x_0^n = & y_0 \\ p(x_1) = & a_0 + & a_1 x_1 + & a_2 x_1^2 + & \ldots + & a_n x_1^n = & y_1 \\ p(x_2) = & a_0 + & a_1 x_2 + & a_2 x_2^2 + & \ldots + & a_n x_2^n = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p(x_n) = & a_0 + & a_1 x_n + & a_2 x_n^2 + & \ldots + & a_n x_n^n = & y_n. \end{array}$$

Daher haben wir, um die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu finden, das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{cccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & 1 \\ \hline 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^n & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n & y_1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^n & y_n \end{array}$$

(b) Nach Einsetzen der angegeben Werte von $x_i = 0,1,2,3,4$ und $y_i = 0,1,0,2,0$ in das Gleichungssystem aus **(a)** mit $n = 4$ erhalten und berechnen wir (wobei Z=Zeile bedeutet)

$$\begin{array}{ccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 2 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{2.,3.,4.,5.Z}-\text{1.Z}} \begin{array}{ccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 27 & 81 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 64 & 256 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{5.Z}-4\times(\text{2.Z})]{\text{3.Z}-2\times(\text{2.Z}),\ \text{4.Z}-3\times(\text{2.Z})} \begin{array}{ccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 78 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 60 & 252 & -4 \end{array} \xrightarrow[\text{3.Z}-6\times(\text{3.Z})]{\text{4.Z}-3\times(\text{3.Z})} \begin{array}{ccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 168 & 8 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{5.Z}-4\times(\text{4.Z})} \begin{array}{ccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & -12 \end{array} \quad (*)$$

Rückwärtseinsetzen ergibt dann

$$a_4 = \frac{-12}{24} = -\frac{1}{2} \quad \text{(aus der 5. Zeile von } (*)\text{)},$$
$$a_3 = \frac{5 - 36a_4}{6} = \frac{5 - 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{6} = \frac{5+18}{6} = \frac{23}{6} \quad \text{(aus der 4. Zeile von } (*)\text{)},$$
$$a_2 = \frac{-2 - 14a_4 - 6a_3}{2} = \frac{-2 - 14 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot \frac{23}{6}}{2} = \frac{-2+7-23}{2} = -9 \quad \text{(aus der 3. Zeile von } (*)\text{)},$$
$$a_1 = 1 - a_4 - a_3 - a_2 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{23}{6} - (-9) = \tfrac{6+3-23+54}{6} = \frac{20}{3} \quad \text{(aus der 2. Zeile von } (*)\text{)},$$
$$a_0 = 0 \quad \text{(aus der 1. Zeile von } (*)\text{)}.$$

Das Interpolationspolynom $p(x)$ lautet daher

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \\ &= \frac{20}{3}x - 9x^2 + \frac{23}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4. \end{aligned}$$

(c) Definiere das Kronecker-Symbol δ_{ik} durch

$$\delta_{ik} := \begin{cases} 1, & \text{für } i = k, \\ 0, & \text{für } i \neq k. \end{cases}$$

Damit folgt aus der Definition von $\ell_i(x)$, dass

$$\begin{aligned}
\ell_i(x_k) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} \\
&= \begin{cases} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i=k}}^{n} \frac{x_k-x_j}{x_k-x_j} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i=k}}^{n} 1 = 1, & \text{wenn } i = k \\ \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i\neq k}}^{n} \frac{x_k-x_j}{x_i-x_j} = \underbrace{\frac{x_k-x_k}{x_i-x_k}}_{=0} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i, j\neq k}}^{n} \frac{x_k-x_j}{x_i-x_j} = 0, & \text{wenn } i \neq k \end{cases} \\
&= \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = k, \\ 0, & \text{für } i \neq k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Definiere zudem das Polynom

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x).$$

Aus der obigen Gleichung $\ell_i(x_k) = \delta_{ik}$ folgt nun

$$L(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{ik} = y_k.$$

Also erfüllt $L(x)$ die Bedingungen für das Interpolationspolynom $p(x)$.

Für die Werte $x = 0, 1, 2, 3, 4$ und $y = 0, 1, 0, 2, 0$, die in **(b)** gegeben sind, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
L(x) &= \sum_{i=0}^{4} y_i \ell_i(x) \\
&= 0 \cdot \ell_0(x) + 1 \cdot \ell_1(x) + 0 \cdot \ell_2(x) + 2 \cdot \ell_3(x) + 0 \cdot \ell_4(x) \\
&= \ell_1(x) + 2\ell_3(x) \\
&= \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} \cdot \frac{x-4}{1-4} + 2 \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} \cdot \frac{x-4}{3-4} \\
&= -\frac{1}{6}x(x-2)(x-3)(x-4) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)(x-4) \\
&= -\left(\frac{1}{6}(x-3) + \frac{1}{3}(x-1)\right) x(x-2)(x-4) \\
&= -\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) x(x^2 - 2x - 4x + 8) \\
&= -\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\right) (x^3 - 6x^2 + 8x) \\
&= -\left(\frac{1}{2}x(x^3 - 6x^2 + 8x) - \frac{5}{6}(x^3 - 6x^2 + 8x)\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 4x^2 - \frac{5}{6}x^3 + 5x^2 - \frac{40}{6}x\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2}x^4 - \left(\frac{18}{6} + \frac{5}{6}\right) x^3 + 9x^2 - \frac{20}{3}x\right) \\
&= -\frac{1}{2}x^4 + \frac{23}{6}x^3 - 9x^2 + \frac{20}{3}x \\
&= \frac{20}{3}x - 9x^2 + \frac{23}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \\
&= p(x).
\end{aligned}
$$

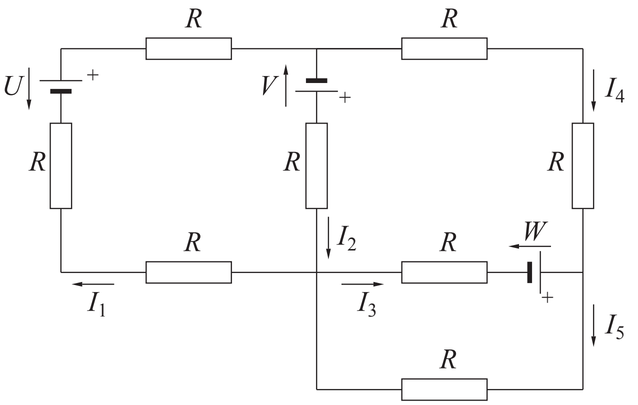
4. *Kirchhoffsche Regeln*
Für elektrische Stromkreise gelten die folgenden zwei Regeln:

- Die Summe der Teilströme in jedem Knoten ist Null.
- Die Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist Null.

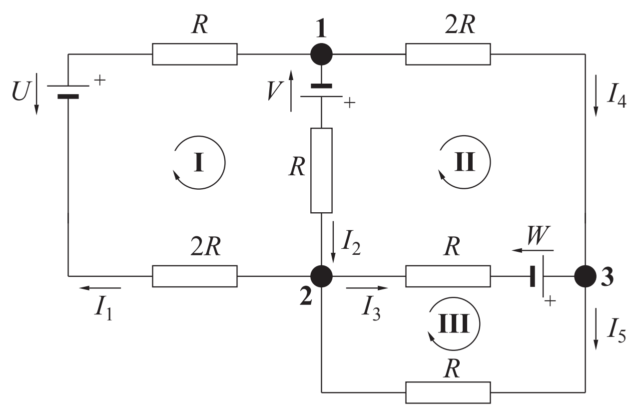
Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für die fünf Teilströme des unten skizzierten Gleichstromkreises und lösen Sie es für

$$R = 300\Omega, \quad U = V = 300V, \quad W = 200V.$$

Hinweis: Wählen Sie die Vorzeichen entsprechend den Zählpfeilen!



Lösung: Für die Teilströme I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 kann man aus der obigen Skizze die folgenden Gleichungen ablesen:
(Stromfluss im Uhrzeigersinn, wie angedeutet)



Für die Knoten **1**, **2**, **3** folgt: (**1.**↔**1**, **2.**↔**2**, **3.**↔**3**)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\textbf{1.} & I_1 & - & I_2 & & & - & I_4 & & & = & 0 \\
\textbf{2.} & -I_1 & + & I_2 & - & I_3 & & & + & I_5 & = & 0 \\
\textbf{3.} & & & & & I_3 & + & I_4 & - & I_5 & = & 0
\end{array}
$$

und mit der Formel $U_R = RI$ folgt für die Maschen **I**, **II**, **III** zusätzlich:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrrcl}
\textbf{I.} & (2R+R)I_1 & + & RI_2 & & & & & & & -U-V & = & 0 \\
\textbf{II.} & & & -RI_2 & - & RI_3 & + & 2RI_4 & & & +V+W & = & 0 \\
\textbf{III.} & & & & & RI_3 & & & + & RI_5 & -W & = & 0
\end{array}
$$

oder äquivalent

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\textbf{I.} & 3RI_1 & + & RI_2 & & & & & & & = & U+V \\
\textbf{II.} & & & -RI_2 & - & RI_3 & + & 2RI_4 & & & = & -V-W \\
\textbf{III.} & & & & & RI_3 & & & + & RI_5 & = & W
\end{array}$$

Für $R = 300\Omega$, $U = V = 300V$ und $W = 200V$ bekommt man daraus die Matrix

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	1
1	−1	0	−1	0	0
−1	1	−1	0	1	0
0	0	1	1	−1	0
900	300	0	0	0	600
0	−300	−300	600	0	−500
0	0	300	0	300	200

Nun multiplizieren wir die 4. Zeile mit $\frac{1}{300}$, die 5. Zeile und die 6. Zeile je mit $\frac{1}{100}$ und erhalten das äquivalente Gleichungssystem

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	1
1	−1	0	−1	0	0
−1	1	−1	0	1	0
0	0	1	1	−1	0
3	1	0	0	0	2
0	−3	−3	6	0	−5
0	0	3	0	3	2

Dann addieren wir die 1. Zeile zur 2. Zeile und multiplizieren die 3. Zeile mit (-1), um das folgende Gleichungssystem zu erhalten

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	1
1	−1	0	−1	0	0
0	0	−1	−1	1	0
0	0	−1	−1	1	0
3	1	0	0	0	2
0	−3	−3	6	0	−5
0	0	3	0	3	2

Nun subtrahieren wir die 3. Zeile von der 2. Zeile und subtrahieren $3\times$(1. Zeile) von der 4. Zeile:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	1
1	−1	0	−1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	−1	−1	1	0
0	4	0	3	0	2
0	−3	−3	6	0	−5
0	0	3	0	3	2

Nun addieren wir 3×(3. Zeile) zur 6. Zeile und multiplizieren die 5. Zeile mit 4:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	1
1	-1	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	-1	-1	1	0
0	4	0	3	0	2
0	-12	-12	24	0	-20
0	0	0	-3	6	2

Jetzt vertauschen wir die Zeilen: 1. Zeile = 1. Zeile, 2. Zeile = 4. Zeile, 3. Zeile = 3. Zeile, 4. Zeile = 6. Zeile, 5. Zeile = 5. Zeile, 6. Zeile = 2. Zeile:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	1
1	-1	0	-1	0	0
0	4	0	3	0	2
0	0	-1	-1	1	0
0	0	0	-3	6	2
0	-12	-12	24	0	-20
0	0	0	0	0	0

Nun addieren wir 3×(2. Zeile) zur 5. Zeile:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	1
1	-1	0	-1	0	0
0	4	0	3	0	2
0	0	-1	-1	1	0
0	0	0	-3	6	2
0	0	-12	33	0	-14
0	0	0	0	0	0

Dann subtrahieren wir 12×(3. Zeile) von der 5. Zeile:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	1
1	-1	0	-1	0	0
0	4	0	3	0	2
0	0	-1	-1	1	0
0	0	0	-3	6	2
0	0	0	45	-12	-14
0	0	0	0	0	0

Zuletzt addieren wir 15×(4. Zeile) zur 5. Zeile und erhalten nach Anwendung des kompletten

Gaussverfahrens das Schema

$$\begin{array}{ccccc|cl}
I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 & \\
\hline
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \\
0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & (*) \\
0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 78 & 16 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen findet man mit $A = \frac{V}{\Omega}$ die Werte

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{16}{78}A = \frac{8}{39}A \quad \text{(aus der 5. Zeile von } (*)\text{)}, \\
I_4 &= \frac{2A - 6I_5}{-3} = -\frac{2 - \frac{48}{39}}{3}A = -\frac{78-48}{3 \cdot 39}A = -\frac{30}{3 \cdot 39}A = -\frac{10}{39}A \quad \text{(aus der 4. Zeile von } (*)\text{)}, \\
I_3 &= I_5 - I_4 = \frac{8}{39}A - \left(-\frac{10}{39}A\right) = \frac{18}{39}A \quad \text{(aus der 3. Zeile von } (*)\text{)}, \\
I_2 &= \frac{2A - 3I_4}{4} = \frac{2 - 3 \cdot \left(-\frac{10}{39}\right)}{4}A = \frac{78+30}{4 \cdot 39}A = \frac{108}{4 \cdot 39}A = \frac{27}{39}A \quad \text{(aus der 2. Zeile von } (*)\text{)}, \\
I_1 &= I_4 + I_2 = -\frac{10}{39}A + \frac{27}{39}A = \frac{17}{39}A \quad \text{(aus der 1. Zeile von } (*)\text{)}.
\end{aligned}$$

Dies lässt sich zusammenfassend auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 17A \\ 27A \\ 18A \\ -10A \\ 8A \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.436A \\ 0.692A \\ 0.462A \\ -0.256A \\ 0.205A \end{pmatrix}.$$