

# Lösung Serie 6

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 11. November um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2022/hs/401-0171-00L/>).

“Buch” steht im Folgenden für “K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage”.

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Sei  $A$  symmetrisch und regulär. Dann ist auch  $A^{-1}$  symmetrisch.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $A$  genau für  $a = \pm\sqrt{3/2}$  orthogonal.

(c) Es gibt orthogonale Matrizen, die singularär sind.

**Lösung:** Korrekt sind (a) und (b), denn es gilt:

✓ (a) Sei  $A$  symmetrisch und regulär. Dann ist auch  $A^{-1}$  symmetrisch.

*Richtig, denn*

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1},$$

*da  $A = A^T$  ( $A$  ist symmetrisch) und  $A^{-1}$  existiert ( $A$  ist regulär).*

*Die allgemein gültige Regel*

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

*folgt aus der Rechnung*

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = \mathbb{I}_n^T = \mathbb{I}_n \iff (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}\mathbb{I}_n = (A^T)^{-1},$$

*wobei der erste Schritt die Formel  $(AB)^T = B^T A^T$  aus der Aufgabe 1 der Serie 4 benutzt und  $\mathbb{I}_n$  die  $n \times n$ -Identitätsmatrix ist.*

✓ (b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $A$  genau für  $a = \pm\sqrt{3/2}$  orthogonal.

Richtig, denn  $A^T A = \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  gilt genau für diese beiden Werte  $a = \pm\sqrt{3/2}$ .

Nachrechnen liefert:

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} & \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{4\sqrt{2}} - \frac{a}{4\sqrt{2}} & 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{4\sqrt{2}} - \frac{a}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} & 0 + \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{2\sqrt{2}} \\ 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & 0 + \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{2\sqrt{2}} & 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{genau dann, wenn } \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

**Tipp:** Die Matrix  $A^T A$  muss nach Aufgabe 1 der Serie 4 symmetrisch sein und man sollte daher beim Ausrechnen nicht unnötig arbeiten, da die drei nicht diagonalen Einträge jeweils doppelt auftreten (Symmetrie).

Damit  $A$  orthogonal ist (was per Definition bedeutet, dass  $A^T A = \mathbb{I}_3$  gilt), muss daher gelten

$$\frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} = 1 \iff 2a^2 + 1 = 4 \iff 2a^2 = 3 \iff a^2 = \frac{3}{2} \iff a = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{oder} \quad a = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

und dies sind genau die gegebenen Werte  $a = \pm\sqrt{3/2}$  als Lösungen.

(c) Es gibt orthogonale Matrizen, die singular sind.

Falsch, eine orthogonale Matrix  $A$  besitzt immer die Inverse  $A^T$ , da per Definition  $A^T A = \mathbb{I}_n$  gilt und für quadratische Matrizen aus  $XA = \mathbb{I}_n$  immer  $X = A^{-1}$  folgt.

2. Reguläre und Singuläre  $3 \times 3$ -Matrizen

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass  $A$  regulär ist.

(b) Für welche Werte des Parameters  $\gamma$  ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \gamma & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

singulär?

**Lösung:**

(a) Nach Satz 2.8 aus dem Buch ("K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage") gilt für jede  $n \times n$ -Matrix  $A$ :

$A$  ist regulär  $\iff$  das Gleichungssystem  $Ax = 0$  hat nur die triviale Lösung  $x = 0$ .

Also reicht es die Lösungsmenge von  $Ax = 0$  zu betrachten. Wir verwenden dafür den Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{1.Z \leftrightarrow 3.Z} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array} \xrightarrow{\substack{2.Z=2.Z-2 \times (1.Z) \\ 3.Z=3.Z-3 \times (1.Z)}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \xrightarrow{3.Z=3.Z+2 \times (2.Z)} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \quad (*)
 \end{array}$$

Die einzige Lösung hier ist  $x = 0$ , da aus (\*) folgt, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ -2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x_3 = 0 \text{ (aus der 3. Zeile)} \\
 \implies x_2 = 0 \text{ (aus der 2. Zeile mit } x_3 = 0) \\
 \implies x_1 = 0 \text{ (aus der 1. Zeile mit } x_2 = 0, x_3 = 0).$$

Deshalb ist  $A$  regulär.

- (b) Aus Satz 2.8 aus dem Buch (“K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage”) folgt auch für jede  $n \times n$ -Matrix  $B$ :

$B$  ist singulär  $\iff$  das Gleichungssystem  $Bx = 0$  hat nichttriviale Lösungen.

Deshalb betrachten wir die Lösungsmenge von  $Bx = 0$ :

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & \gamma & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & \gamma & 0 \end{array} \xrightarrow{1.Z \leftrightarrow 2.Z} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & \gamma & 4 & 0 \\ -1 & -1 & \gamma & 0 \end{array} \xrightarrow{\substack{2.Z = 2.Z - 2 \times (1.Z) \\ 3.Z = 3.Z + 1.Z}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \gamma - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma + 2 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{2.Z \leftrightarrow 3.Z} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma + 2 & 0 \\ 0 & \gamma - 4 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{3.Z = 3.Z - (\gamma - 4) \times (2.Z)} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma + 2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\gamma - 4)(\gamma + 2) & 0 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma + 2 & 0 \\ 0 & 0 & (4 - \gamma)(\gamma + 2) & 0 \end{array} \quad (*)$$

Falls  $(4 - \gamma)(\gamma + 2) = 0$  ist, ist  $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$  ein freier Parameter, da dann wegen  $(*)$  gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \gamma + 2 \\ 0 & 0 & (4 - \gamma)(\gamma + 2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 + (\gamma + 2)x_3 \\ (4 - \gamma)(\gamma + 2)x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\implies x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$  und es gilt nur, wenn  $(4 - \gamma)(\gamma + 2) = 0$  nicht zwingend  $x_3 = 0$  (aus der 3. Zeile)

$\implies x_2 = -(\gamma + 2)x_3$  und ist eindeutig durch  $x_3$  bestimmt (aus der 2. Zeile)

$\implies x_1 = -2x_3 - 2x_2$  und ist ebenfalls eindeutig durch  $x_3$  bestimmt (aus der 1. Zeile)

und  $Bx = 0$  besitzt daher nichttriviale Lösungen  $x \neq 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Somit ist  $B$  singulär für die Werte  $\gamma \in \{-2, 4\}$ , weil genau für diese beiden Werte von  $\gamma$  gilt  $(4 - \gamma)(\gamma + 2) = 0$ .

### 3. Orthogonale $2 \times 2$ -Matrizen

Sei  $\mathbb{I}_2$  die  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix und  $u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ .

- (a) Für welche Werte des Parameters  $\alpha$  ist die Matrix

$$V := \mathbb{I}_2 - \alpha uu^T$$

orthogonal?

(b) Lösen Sie für die in (a) ermittelten Werte von  $\alpha$  das Gleichungssystem

$$V \cdot x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ohne den Gauss-Algorithmus zu benutzen.

(c) Kontrollieren Sie (a) und (b) mit MATLAB.

**Lösung:**

(a) Es sei

$$V := \mathbb{I}_2 - \alpha uu^T.$$

Wir können die gesuchten Werte von  $\alpha$  wie folgt finden:

$V$  ist per Definition orthogonal, falls  $V^T V = \mathbb{I}_2$  mit  $\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Da  $\mathbb{I}_2^T = \mathbb{I}_2$  und  $(uu^T)^T = (u^T)^T u^T = uu^T$ , folgt

$$\begin{aligned} V^T &= (\mathbb{I}_2 - \alpha uu^T)^T \\ &= \mathbb{I}_2^T - (\alpha uu^T)^T \\ &= \mathbb{I}_2^T - (uu^T)^T \alpha^T \\ &= \mathbb{I}_2 - \alpha (uu^T)^T \\ &= \mathbb{I}_2 - \alpha (u^T)^T u^T \\ &= \mathbb{I}_2 - \alpha uu^T \\ &= V \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} V^T V &= VV \\ &= (\mathbb{I}_2 - \alpha uu^T) \cdot (\mathbb{I}_2 - \alpha uu^T) \\ &= \mathbb{I}_2 \cdot \mathbb{I}_2 - \mathbb{I}_2 \alpha uu^T - \alpha uu^T \mathbb{I}_2 + (-\alpha uu^T) \cdot (-\alpha uu^T) \\ &= \mathbb{I}_2 \cdot \mathbb{I}_2 - \mathbb{I}_2 \alpha uu^T - \mathbb{I}_2 \alpha uu^T + \alpha uu^T \alpha uu^T \\ &= \mathbb{I}_2 \cdot \mathbb{I}_2 - 2\mathbb{I}_2 \alpha uu^T + \alpha uu^T \alpha uu^T \\ &= \mathbb{I}_2 - 2\alpha uu^T + \alpha^2 \underbrace{u^T u}_{=1} u^T \\ &= \mathbb{I}_2 - 2\alpha uu^T + \alpha^2 uu^T \\ &= \mathbb{I}_2 + (\alpha^2 - 2\alpha) uu^T. \end{aligned}$$

In der obigen Rechnung haben wir auch verwendet, dass  $u^T u = 1$  gilt, was aus der Berechnung

$$\begin{aligned} u^T u &= \left( \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)^T \right)^T \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)^T \\ &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\ &= 1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

folgt.

**Bemerkung:**

Der Term  $uu^T$  ist die  $2 \times 2$ -Matrix

$$\begin{aligned} uu^T &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)^T \cdot \left( \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)^T \right)^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \end{aligned}$$

aber  $u^T u = 1 \in \mathbb{R}$  ist eine reelle Zahl ( $= 1 \times 1$ -Matrix).

Da  $uu^T \neq 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , gilt  $V^T V = \mathbb{I}_2$  ( $\iff V$  ist orthogonal) genau dann, wenn

$$V^T V = \mathbb{I}_2 + (\alpha^2 - 2\alpha)uu^T = \mathbb{I}_2 \iff (\alpha^2 - 2\alpha)uu^T = 0,$$

also genau dann, wenn  $\alpha^2 - 2\alpha = 0 \iff \alpha(\alpha - 2) = 0$ , also genau für  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 2$ .

**Bemerkung:**

Für  $\alpha = 0$  ist  $V = \mathbb{I}_2 - 0 \cdot uu^T = \mathbb{I}_2$  trivialerweise orthogonal, da

$$V^T V = \mathbb{I}_2^T \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_2 \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_2.$$

Allgemeiner ist eine  $n \times n$ -Matrix  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  von der Form  $V := \mathbb{I}_n - 2uu^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $u^T u = 1$  und der  $n \times n$ -Identitätsmatrix  $\mathbb{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  immer orthogonal, da

$$\begin{aligned} V^T V &= (\mathbb{I}_n - 2uu^T)^T \cdot (\mathbb{I}_n - 2uu^T) \\ &= (\mathbb{I}_n^T - (u^T)^T u^T 2^T) \cdot (\mathbb{I}_n - 2uu^T) \\ &= (\mathbb{I}_n - 2uu^T) \cdot (\mathbb{I}_n - 2uu^T) \\ &= \mathbb{I}_n \cdot \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n 2uu^T - 2uu^T \mathbb{I}_n + (-2uu^T) \cdot (-2uu^T) \\ &= \mathbb{I}_n - 2uu^T - 2uu^T + 4uu^T uu^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{I}_n - 4uu^T + 4u \underbrace{u^T u}_{=1} u^T \\
&= \mathbb{I}_n - 4uu^T + 4uu^T \\
&= \mathbb{I}_n.
\end{aligned}$$

Man nennt eine solche Matrix *Householder-Matrix*. Siehe dazu Seite 32 im Buch (“K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage”).

**Bemerkung:**

Die folgende Rechnung

$$\begin{aligned}
V^T &= (\mathbb{I}_n - 2uu^T)^T \\
&= \mathbb{I}_n^T - (2uu^T)^T \\
&= \mathbb{I}_n^T - (u^T)^T u^T 2^T \\
&= \mathbb{I}_n - 2uu^T \\
&= V
\end{aligned}$$

zeigt zudem, dass für eine *Householder-Matrix*  $V$  immer  $V^T = V$  gilt.

(b) Wenn die Inverse  $V^{-1}$  existiert, gilt

$$V \cdot x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \iff x = V^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**1. Für  $\alpha = 0$ :**

Hier gilt, wie oben beschrieben

$$V = \mathbb{I}_2 - 0 \cdot uu^T = \mathbb{I}_2$$

und wir berechnen

$$V \cdot x = \mathbb{I}_2 \cdot x = x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \iff x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**2. Für  $\alpha = 2$ :**

Hier gilt

$$\begin{aligned}
V &= \mathbb{I}_2 - 2 \cdot uu^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da  $V$  orthogonal ( $V^T V = \mathbb{I}_2$ ) und symmetrisch ( $V^T = V$ ) ist, gilt

$$V^T V = V V = V^2 = \mathbb{I}_2 \iff V = V^{-1}$$

und damit gilt

$$V^{-1} = V^T = V.$$

Die Inverse  $V^{-1}$  einer orthogonalen Matrix  $V$  existiert also immer und ist im Allgemeinen gegeben durch  $V^{-1} = V^T$ .

Also berechnen wir mit der obigen Äquivalenz  $V \cdot x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \iff x = V^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

und  $V^{-1} = V$ , dass

$$x = V^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = V \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir haben das folgende MATLAB-Skript:

```
%a)
u = [sqrt(3)/2;1/2];
A = eye(2)-2*(u*u. ');

%Bestimmt die Matrix V fuer alpha = 2. eye(2) bezeichnet die Einheitsmatrix
%der Dimension 2x2.

B=eye(2);

%B ist die Matrix V fuer den Parameter alpha = 0.

A'*A

%Prueft, ob A orthogonal ist. ' transponiert eine Matrix. Sie ist genau dann
%orthogonal, wenn A'*A = eye(2) gilt, und das wird auch
%von der Ausgabe angezeigt. Bemerke aber, dass die logische Aussage
%A'*A = eye(2) falsch ist; dies liegt nur an winzigen Rundungsfehlern.
B'*B

%Auch dies ergibt - trivialerweise - die Identitaet, also sind beide
%Matrizen orthogonal.

%b)
xA = [0;2];
xB = [-sqrt(3);1];

%Initialisiert die Variablen fuer die berechneten Loesungen x.

A*xA
B*xB

%Bestimmt in den jeweiligen Faellen das Produkt der Matrix V mit dem Vektor
%x. Die Ausgabe zeigt jeweils den Vektor [-sqrt(3);1], was verifiziert,
%dass die Loesungen in der Tat korrekt sind.
```



4. Gegeben sei die  $2 \times 2$ -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- (a) Für welche Werte von  $a, b, c, d$  ist  $A$  regulär?  
 (b) Bestimmen Sie für die in (a) ermittelten Werte von  $a, b, c, d$  die Inverse  $A^{-1}$ .

**Lösung:**

- (a) Nach Satz 2.8 aus dem Buch ("K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage") gilt für jede  $n \times n$ -Matrix  $A$ :

$A$  ist regulär  $\iff$  das Gleichungssystem  $Ax = 0$  hat nur die triviale Lösung  $x = 0$ .

Also reicht es, die Lösungsmenge von  $Ax = 0$  zu betrachten. Wir verwenden den Gauss-Algorithmus:

**1. Fall:  $a \neq 0$ :** Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \xrightarrow{2.Z=2.Z-\frac{c}{a} \times (1.Z)} \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ a & b & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & 0 \end{array} \quad (*)$$

Dieses System  $(*)$  hat Rang 1 genau dann, wenn  $d - \frac{bc}{a} = 0 \iff ad - bc = 0$  gilt. Folglich ist die Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  regulär genau dann, wenn  $ad - bc \neq 0$  gilt.

**2. Fall:  $a = 0$ :** Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \xrightarrow{1.Z \leftrightarrow 2.Z} \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & 1 \\ c & d & 0 \\ 0 & b & 0 \end{array}$$

Dieses System hat Rang  $< 2$  genau dann, wenn entweder  $b = 0$  oder  $c = 0$  ist, also wenn  $bc = 0 \iff ad - bc = 0$  gilt, da  $a = 0$  ist. Folglich ist die Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  auch in diesem Fall regulär genau dann, wenn  $ad - bc \neq 0$  gilt.

Zusammenfassend gilt daher:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ist regulär } \iff ad - bc \neq 0.$$

- (b) Sei  $A$  regulär, also  $ad - bc \neq 0$ . Wir setzen

$$X := A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

und benutzen die Notationen

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Definitionen gilt nun

$$X := A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = (x^{(1)} \quad x^{(2)}) \quad \text{und} \quad \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1 \quad e_2).$$

Damit folgt aus der Gleichung

$$(e_1 \quad e_2) = \mathbb{I}_2 = AA^{-1} = AX = A \cdot (x^{(1)} \quad x^{(2)}) = (Ax^{(1)} \quad Ax^{(2)}),$$

dass  $Ax^{(1)} = e_1$  und  $Ax^{(2)} = e_2$  gelten muss. Insofern entspricht  $AX = \mathbb{I}_2$  einem Gleichungssystem  $Ax = e_i$  mit Lösungen  $x = x^{(i)}$  für  $i = 1, 2$  mit zwei rechten Seiten.

Wir lösen es mit dem daraus resultierenden Gauss-Jordan-Algorithmus:

Betrachte die erweiterte Matrix

$$\left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**1. Fall  $a \neq 0$ :** Wir berechnen

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2.Z=2.Z-\frac{c}{a} \times (1.Z)} \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{2.Z=a \times (2.Z)} \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array} \right) \xrightarrow{1.Z=1.Z-\frac{b}{ad-bc} \times (2.Z)} \left( \begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+\frac{bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array} \right) \\ & = \left( \begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad-bc+bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{1.Z=\frac{ad-bc}{a} \times (1.Z)} \left( \begin{array}{cc|cc} ad-bc & 0 & d & -b \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array} \right) \xrightarrow{1.Z=\frac{1}{ad-bc} \times (1.Z)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$A^{-1} = X = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**2. Fall:  $a = 0$ :** Da  $ad - bc \neq 0$  gilt und  $a = 0$  ist, gilt  $bc \neq 0$  und somit ist  $b \neq 0$  und  $c \neq 0$ . Es folgt ähnlich wie oben

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{1.Z \leftrightarrow 2.Z} \left( \begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{1.Z=1.Z-\frac{d}{b} \times (2.Z)} \left( \begin{array}{cc|cc} c & 0 & -\frac{d}{b} & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{1.Z=\frac{1}{c} \times (1.Z)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{-bc} & \frac{-b}{-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{-bc} & \frac{0}{ad-bc} \end{array} \right) \xrightarrow{a=0} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Also gilt auch für  $a = 0$ :

$$A^{-1} = X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassend gilt daher:

Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ist singulär (nicht invertierbar), wenn  $ad - bc = 0$  gilt.

Ansonsten ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{für alle } a, b, c, d \text{ mit } ad - bc \neq 0.$$