Lösung Serie 7

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 18. November um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link uber https://metaphor.ethz.ch/x/2022/hs/401-0171-00L/).

1. Gegeben seien die zwei Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden beiden Aussagen gelten?

(a) A_1 ist orthogonal.

(b) A_2 ist orthogonal.

Lösung: Korrekt ist nur (b), denn es gilt:

(a) A_1 ist orthogonal.

✓ (b) A_2 ist orthogonal.

Begründung: Die beiden Matrizen A_1 und A_2 sind gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Damit eine Matrix orthogonal ist, müssen ihre Spalten orthonormal sein. Dies ist nur bei A_2 erfüllt, da

$$A_2^{(1)} \cdot A_2^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{12}{25} + \frac{12}{25} = 0$$

und

$$\left\|A_2^{(1)}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}\right\| = \left\|\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{5}\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{5}\sqrt{3^2+4^2} = \frac{1}{5}\sqrt{9+16} = \frac{1}{5}\sqrt{25} = \frac{1}{5}\cdot 5 = 1,$$
$$\left\|A_2^{(2)}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}\right\| = \left\|\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{5}\left\|\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{5}\sqrt{(-4)^2+3^2} = \frac{1}{5}\sqrt{16+9} = \frac{1}{5}\sqrt{25} = \frac{1}{5}\cdot 5 = 1.$$

Bei A_1 sind die Spalten nicht orthogonal, da

$$A_1^{(1)} \cdot A_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 + 0 = 1 \neq 0.$$

Das Skalarprodukt der beiden Spalten von A_1 ist daher 1 statt 0 und die zweite Spalte $A_1^{(2)}$ von A_1 ist auch nicht normiert, da ihre Norm $\sqrt{2}$ statt 1 ist, was aus der Rechnung

$$\left\| A_1^{(1)} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1,$$
$$\left\| A_1^{(2)} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 1$$

ersichtlich ist. Die erste Spalte $A_1^{(1)}$ von A_1 ist hingegen normiert.

2. *LR-Zerlegung*
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe von (a) für die rechte Seite

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Matlab.

Lösung:

(a) Wir berechnen

$$\begin{array}{r} \\ \underline{\mathbf{+2}} \\ \underline{\mathbf{-1}} \end{array} \boxed{\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{array}} \xrightarrow[3.Z=3.Z\underline{+}\mathbf{1}\times(1.Z)]{2.Z=2.Z\underline{-}\mathbf{2}\times(1.Z)} \begin{array}{r} \\ \\ \underline{\mathbf{+3}} \end{array} \boxed{\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}} \xrightarrow{3.Z=3.Z\underline{-}\mathbf{3}\times(2.Z)} \boxed{\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}} \quad (*).$$

$$\Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(aus den fettgedruckten Manipulationen mit Einsen auf der Diagonalen)}$$

und

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(aus } (*)\text{).}$$

(b) Es gilt

$$Ax = LRx = L(Rx) = b \Longleftrightarrow x = R^{-1}(L^{-1}b) = \underbrace{R^{-1}\underbrace{(L^{-1}b)}_{=\text{Lösung } y \text{ von } Ly=b}}_{=\text{Lösung } x \text{ von } Rx = L^{-1}b = y}.$$

Daraus ergibt sich das folgende immer gleiche Lösungsverfahren mit zwei Schritten (i) und (ii):

(i) Zuerst lösen wir $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_1 + y_2 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 - 2y_1 \\ -7 + y_1 - 3y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 - 2 \cdot 4 \\ -7 + 4 - 3 \cdot (7 - 2 \cdot 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Dann lösen wir $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4 - x_3 + 2x_2}{2} \\ -1 - x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4 - 0 + 2 \cdot (-1 - 0)}{2} \\ -1 - 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

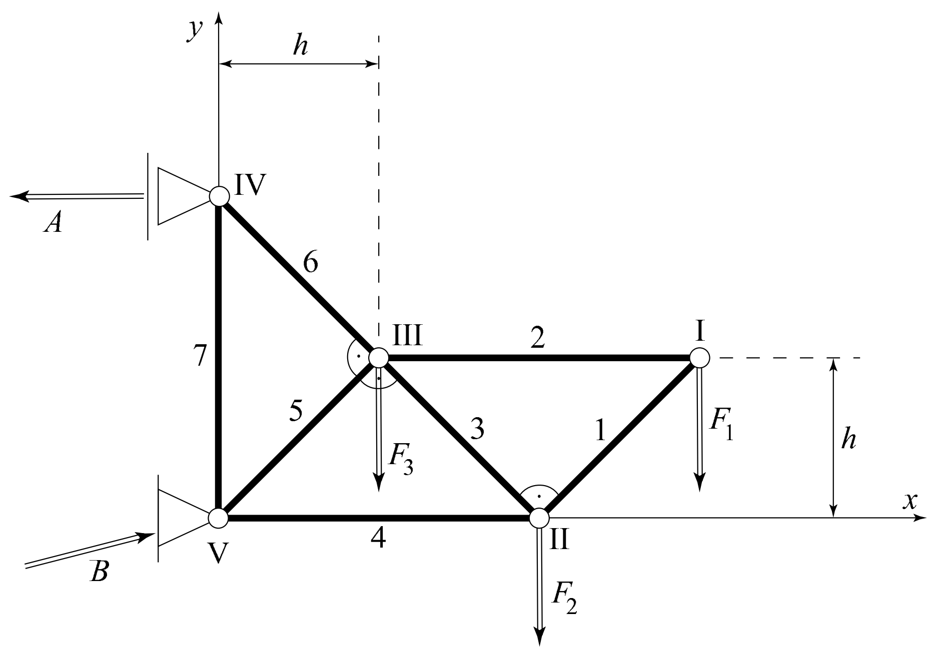
Daher ist die Lösung x von $Ax = b$ gegeben durch

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir haben das folgende MATLAB-Skript:

```
A=[ 2 -2 1; 4 -3 3; -2 5 1]
[L,R,P]=lu(A)
% fuer eine Loesung ohne Permutationsmatrix
% (siehe Abschnitt "[L,U,P] = LU(A,THRESH)" in
% der Matlab-Hilfe (>> help lu) zum Befehl lu):
[L,R,P]=lu(sparse(A),0);
full(L)
full(R)
full(P)
```

3. *Statisches Kräftegleichgewicht*
Gegeben ist das skizzierte Fachwerk mit 7 Stäben und 5 Knoten.



Die drei Lasten F_1, F_2, F_3 rufen in jedem Stabende eine Reaktionskraft parallel zum Stab hervor. Die Reaktionskräfte in den Lagern (IV) und (V) sind die Vektoren $(-A, 0)^\top$ respektive $(B_x, B_y)^\top$. Im statischen Gleichgewicht gelten die beiden Regeln:

(1) Die Summe aller auf einen Knoten wirkenden Kräfte ist Null.

(2) Die Summe aller in einem Stab wirkenden Kräfte ist Null.

(a) Stellen Sie diese Bedingungen in vektorieller Form für das gegebene Fachwerk auf.

Hinweis: Statt pro Stab zwei Kräfte einzuführen (eine pro Stabende), benutzen Sie die Konvention aus (b) für die Stabkräfte in welcher die Bedingung (2) und die Bedingung, dass die Kräfte parallel zur Stabrichtung wirken, bereits implizit enthalten sind.

(b) Leiten Sie daraus ein lineares Gleichungssystem für $A, B_x, B_y, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ her, wobei $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ die sieben Stabkräfte bezeichnen:

$S_i > 0$:

$S_i < 0$:

(c) Lösen Sie mit Hilfe von MATLAB das Gleichungssystem für allgemeine Lasten F_1, F_2, F_3 und folgern Sie daraus die Lösung für

$$F_1 = 10N, F_2 = 20N, F_3 = 30N.$$

(d) Lesen Sie aus der in (c) gefundenen allgemeinen Lösung die 7×3-Matrix E der Einflusszahlen ab, so dass

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_7 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Wir können entweder für jeden der 7 Stäbe zwei Kraftvektoren (einen pro Stabende) einführen oder wir verwenden den Hinweis. Würden wir Ersteres tun, so hätten wir 14 $(= 7 \cdot 2)$ vektorielle Unbekannten, also 28 $(= 14 \cdot 2)$ skalare Unbekannten, da alles in $\mathbb{R}^2$ ist. Dann müssten wir die 7 vektoriellen Gleichungen (7 Stäbe), welche Bedingung (2) liefert aufstellen, sowie die 14 $(= 7 \cdot 2)$ skalaren Gleichungen, welche aus der Bedingung "parallel zur Stabrichtung" resultieren (diese 28 $(= 7 \cdot 2 + 14)$ skalaren Gleichungen sind nicht alle unabhängig). Dadurch würden sich die 28 Unbekannten wieder auf 7 skalare Unbekannten reduzieren. Kurz; es läuft auf dasselbe hinaus, wie wenn wir gleich mit den Skalaren $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ wie in (b) rechnen.

Wir verwenden also die reellen Variablen $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ und die Stabkraft $\vec{F}_{\text{Stab}_i}$ in einem Knoten i errechnet sich durch S_i multipliziert mit dem normierten Vektor $\vec{r}_i$, der in Richtung Stabmittelpunkt zeigt, also

$$\vec{F}_{\text{Stab}_i} = S_i \vec{r}_i \quad \text{mit} \quad ||\vec{r}_i|| = 1.$$

Am anderen Stabende ist der Richtungsvektor zum Mittelpunkt natürlich dann $-\vec{r}_i$ und Bedingung (2) damit automatisch erfüllt, da sich $S_i\vec{r}_i$ und $S_i(-\vec{r}_i)$ zum Nullvektor ($=\vec{0}$) addieren. Und natürlich sind diese Kräfte auch parallel zur Stabrichtung. Dadurch können wir die Bedingung (2) ignorieren.
Die normierten Richtungsvektoren $\vec{r}_i$ lassen sich aus der Skizze ablesen (ausser für $(B_x, B_y)^\top$, welchen wir so stehen lassen).
Zudem gilt

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= F_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\vec{F}_2 &= F_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\vec{F}_3 &= F_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

für die drei Kräfte, welche von den drei Lasten F_1, F_2, F_3 induziert werden.
Gleichermassen ist

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\vec{B} &= \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}, \\
\vec{F}_{\text{Stab}_i} &= S_i \vec{r}_i
\end{aligned}$$

und wir haben die folgenden acht normierten Richtungsvektoren $\vec{r}_i$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow: \vec{r}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \leftarrow: \vec{r}_i = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \uparrow: \vec{r}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \downarrow: \vec{r}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
&\nearrow: \vec{r}_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \swarrow: \vec{r}_i = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \searrow: \vec{r}_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \nwarrow: \vec{r}_i = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten aus der Bedingung (1) für die Knoten (I), (II), (III), (IV) und (V), die folgenden fünf Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad F_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\
&\text{(II)} \quad F_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\
&\text{(III)} \quad F_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_5 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_6 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0, \\
&\text{(IV)} \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_6 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_7 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \\
&\text{(V)} \quad \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} + S_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_5 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

(b) Die Gleichungen für die horizontalen x-Komponenten und die vertikalen y-Komponenten, die aus den obigen fünf Gleichungen für die Knoten (I), (II), (III), (IV) und (V) durch Separation der x-Komponenten und der y-Komponenten sofort folgen, sind

$$
\begin{aligned}
&(\text{I})_x \quad -\frac{S_1}{\sqrt{2}} - S_2 = 0, \\
&(\text{I})_y \quad -F_1 - \frac{S_1}{\sqrt{2}} = 0, \\
&(\text{II})_x \quad \frac{S_1}{\sqrt{2}} - \frac{S_3}{\sqrt{2}} - S_4 = 0, \\
&(\text{II})_y \quad -F_2 + \frac{S_1}{\sqrt{2}} + \frac{S_3}{\sqrt{2}} = 0, \\
&(\text{III})_x \quad S_2 + \frac{S_3}{\sqrt{2}} - \frac{S_5}{\sqrt{2}} - \frac{S_6}{\sqrt{2}} = 0, \\
&(\text{III})_y \quad -F_3 - \frac{S_3}{\sqrt{2}} - \frac{S_5}{\sqrt{2}} + \frac{S_6}{\sqrt{2}} = 0, \\
&(\text{IV})_x \quad -A + \frac{S_6}{\sqrt{2}} = 0, \\
&(\text{IV})_y \quad -\frac{S_6}{\sqrt{2}} - S_7 = 0, \\
&(\text{V})_x \quad B_x + S_4 + \frac{S_5}{\sqrt{2}} = 0, \\
&(\text{V})_y \quad B_y + \frac{S_5}{\sqrt{2}} + S_7 = 0.
\end{aligned}
$$

Dies ist äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I})_x &\quad -\frac{S_1}{\sqrt{2}} - S_2 = 0,\\
(\mathrm{I})_y &\quad -\frac{S_1}{\sqrt{2}} = F_1,\\
(\mathrm{II})_x &\quad \frac{S_1}{\sqrt{2}} - \frac{S_3}{\sqrt{2}} - S_4 = 0,\\
(\mathrm{II})_y &\quad \frac{S_1}{\sqrt{2}} + \frac{S_3}{\sqrt{2}} = F_2,\\
(\mathrm{III})_x &\quad S_2 + \frac{S_3}{\sqrt{2}} - \frac{S_5}{\sqrt{2}} - \frac{S_6}{\sqrt{2}} = 0,\\
(\mathrm{III})_y &\quad -\frac{S_3}{\sqrt{2}} - \frac{S_5}{\sqrt{2}} + \frac{S_6}{\sqrt{2}} = F_3,\\
(\mathrm{IV})_x &\quad -A + \frac{S_6}{\sqrt{2}} = 0,\\
(\mathrm{IV})_y &\quad -\frac{S_6}{\sqrt{2}} - S_7 = 0,\\
(\mathrm{V})_x &\quad B_x + S_4 + \frac{S_5}{\sqrt{2}} = 0,\\
(\mathrm{V})_y &\quad B_y + \frac{S_5}{\sqrt{2}} + S_7 = 0,
\end{aligned}
$$

weil die drei Lasten F_1, F_2, F_3 keine Variablen sind, sondern gegebene Grössen. In Matrix-Schreibweise erhält man

A	B_x	B_y	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	1
0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0	0	F_1
0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	F_2
0	0	0	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0
0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	F_3
-1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	0
0	1	0	0	0	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1	0

(c) Sei M die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die der linken Seite des obigen Gleichungssystems entspricht und p der Vektor

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \\ F_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Koeffizientenspalte. Das Gleichungssystem

$$Mx = p$$

ist genau dann für beliebiges p lösbar, wenn M invertierbar ist, und in diesem Fall lautet die Lösung

$$x = M^{-1}p,$$

wobei

$$x = \begin{pmatrix} A \\ B_x \\ B_y \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden MATLAB, um die Inverse von M mit dem Befehl inv(M) zu berechnen. Falls wir statt der (fehlerbehafteten) numerischen Inverse von M die exakte berechnen wollen, so müssen wir MATLAB mitteilen, dass M eine symbolische Matrix sein soll. Dazu schreibt man M = sym([0 0 0 -1/sqrt(2) ...]) statt M = [0 0 0 -1/sqrt(2) ...] (es muss dazu die Symbolic Math Toolbox installiert sein). Danach kann man ebenfalls mit inv(M) die Inverse M^{-1} berechnen. Es ist

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass

$$x = M^{-1}p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \\ F_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}F_1 + F_2 + \frac{1}{2}F_3 \\ \frac{3}{2}F_1 + F_2 + \frac{1}{2}F_3 \\ F_1 + F_2 + F_3 \\ -\sqrt{2}F_1 \\ F_1 \\ \sqrt{2}F_1 + \sqrt{2}F_2 \\ -2F_1 - F_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_3 \\ \frac{3}{\sqrt{2}}F_1 + \sqrt{2}F_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_3 \\ -\frac{3}{2}F_1 - F_2 - \frac{1}{2}F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B_x \\ B_y \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix}.$$

Für $F_1 = 10N, F_2 = 20N, F_3 = 30N$ folgt daraus, durch einsetzten dieser drei Werte in den obigen Ausdruck für x, dass

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 10 + 20 + \frac{1}{2} \cdot 30 \\ \frac{3}{2} \cdot 10 + 20 + \frac{1}{2} \cdot 30 \\ 10 + 20 + 30 \\ -\sqrt{2} \cdot 10 \\ 10 \\ \sqrt{2} \cdot 10 + \sqrt{2} \cdot 20 \\ -2 \cdot 10 - 20 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 30 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 10 + \sqrt{2} \cdot 20 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 30 \\ -\frac{3}{2} \cdot 10 - 20 - \frac{1}{2} \cdot 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 20 + 15 \\ 15 + 20 + 15 \\ 60 \\ -10\sqrt{2} \\ 10 \\ 30\sqrt{2} \\ -20 - 20 \\ -\frac{20}{\sqrt{2}} \\ \frac{60}{\sqrt{2}} + 20\sqrt{2} \\ -15 - 20 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 60 \\ -10\sqrt{2} \\ 10 \\ 30\sqrt{2} \\ -40 \\ -10\sqrt{2} \\ 50\sqrt{2} \\ -50 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 60 \\ -14.14 \\ 10 \\ 42.43 \\ -40 \\ -14.14 \\ 70.71 \\ -50 \end{pmatrix},$$

da $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106\ldots$ ist.

(d) Aus der obigen allgemeinen Lösung

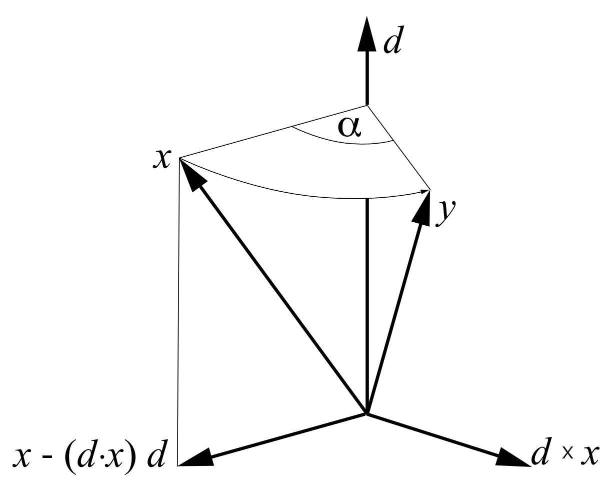
$$x = \begin{pmatrix} A \\ B_x \\ B_y \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}F_1 + F_2 + \frac{1}{2}F_3 \\ \frac{3}{2}F_1 + F_2 + \frac{1}{2}F_3 \\ F_1 + F_2 + F_3 \\ -\sqrt{2}F_1 \\ F_1 \\ \sqrt{2}F_1 + \sqrt{2}F_2 \\ -2F_1 - F_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_3 \\ \frac{3}{\sqrt{2}}F_1 + \sqrt{2}F_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_3 \\ -\frac{3}{2}F_1 - F_2 - \frac{1}{2}F_3 \end{pmatrix}$$

liest man ab, dass

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{=E} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

gilt.

4. Sei d ein Einheitsvektor in $\mathbb{R}^3$. Durch Drehung um den Winkel α um die Achse d wird ein Vektor x in den Vektor y überführt.



(a) Verifizieren Sie die Formel

$$y = \cos(\alpha)x + (1 - \cos(\alpha))(d \cdot x)d + \sin(\alpha)(d \times x).$$

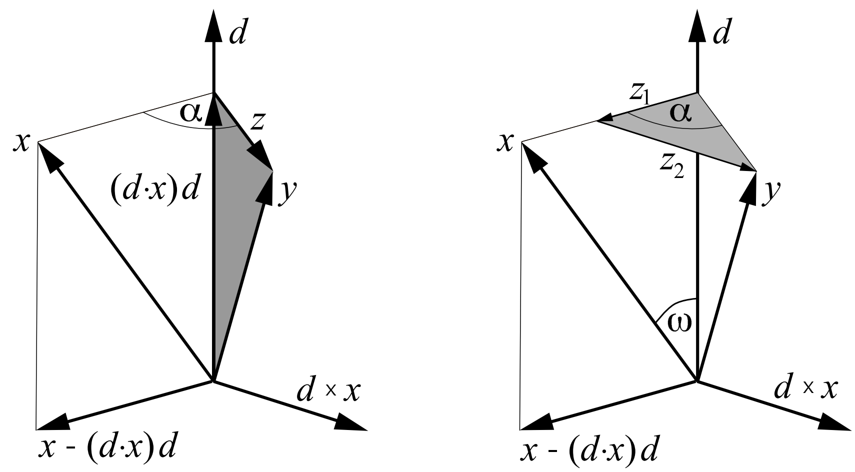
Hinweis: Man benütze, dass $\|d \times x\| = \|x - (d \cdot x)d\|$ gilt. (Warum?)

(b) Beschreiben Sie dieselbe Drehung durch die Formel $y = Dx$ für eine geeignete 3×3-Matrix D.

(c) Verifizieren Sie, dass D orthogonal ist.

Lösung:

(a) Man betrachte die folgende Skizze:



Da d ein Einheitsvektor ist, entspricht $(d \cdot x)d$ der Orthogonalprojektion von x auf d. Dann lässt sich y in der Form $y = (d \cdot x)d + z$ schreiben, wobei z ein auf d senkrechter Vektor ist. Sei z_1 die Vektorkomponente von z in Richtung $x - (d \cdot x)d$ und z_2 die Vektorkomponente von z in Richtung $d \times x$. Dabei ist klar, dass $x - (d \cdot x)d$ und $d \times x$ senkrecht aufeinanderstehen, da $d \times x$ bekanntlich senkrecht auf d und x steht und daher auch senkrecht auf beliebigen Linearkombinationen dieser beiden Vektoren d und x. Somit spannen z_1 und z_2 einen rechten Winkel auf. Daraus folgt offenbar

$$z_1 = \cos(\alpha)\|z\|\frac{x - (d \cdot x)d}{\|x - (d \cdot x)d\|} = (\text{Projektion von } z \text{ auf } x - (d \cdot x)d),$$
$$z_2 = \sin(\alpha)\|z\|\frac{d \times x}{\|d \times x\|} = (\text{Projektion von } z \text{ auf } d \times x),$$

da diese Vektoren genau die richtige Richtung und Länge haben. Weiter entnehmen wir der Skizze, dass bei der Überführung von x in y ebenso $x - (d \cdot x)d$ auf z abgebildet wird, womit diese beiden Vektoren dieselbe Länge haben. Wir erhalten also

$$\|x - (d \cdot x)d\| = \|z\|,$$

woraus sofort

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos(\alpha)\|z\|\frac{x - (d \cdot x)d}{\|x - (d \cdot x)d\|} \\ &= \cos(\alpha)\|z\|\frac{x - (d \cdot x)d}{\|z\|} \\ &= \cos(\alpha)(x - (d \cdot x)d) \end{aligned}$$

folgt. Verwenden wir nun noch den Hinweis $\|d \times x\| = \|x - (d \cdot x)d\| = \|z\|$, so ergibt sich ebenso

$$\begin{aligned} z_2 &= \sin(\alpha)\|z\| \frac{d \times x}{\|d \times x\|} \\ &= \sin(\alpha)\|z\| \frac{d \times x}{\|z\|} \\ &= \sin(\alpha)(d \times x). \end{aligned}$$

Zusammen gilt also

$$\begin{aligned} y &= (d \cdot x)d + z \\ &= (d \cdot x)d + z_1 + z_2 \\ &= (d \cdot x)d + \cos(\alpha)(x - (d \cdot x)d) + \sin(\alpha)(d \times x) \\ &= \cos(\alpha)x + (1 - \cos(\alpha))(d \cdot x)d + \sin(\alpha)(d \times x). \end{aligned}$$

Damit müssen wir uns nur noch überlegen, weshalb $\|d \times x\| = \|x - (d \cdot x)d\|$ gilt. Dazu rechnen wir einfach beide Ausdrücke aus und erhalten einerseits

$$\|x - (d \cdot x)d\| = \|x\| \cdot \sin(\omega) \quad \text{(aus der 2. Skizze oben)}$$

und andererseits

$$\|d \times x\| = \|d\| \cdot \|x\| \cdot \sin(\omega) = \|x\| \cdot \sin(\omega) \quad \text{(2. Skizze oben und Formel in Serie 5, Aufgabe 4(d))},$$

da d ein Einheitsvektor ist und daher $\|d\| = 1$ gilt.
Daraus folgt

$$\|d \times x\| = \|x - (d \cdot x)d\| = \|z\|,$$

womit alles gezeigt ist.

(b) Wir gehen gleich vor wie bei Serie 5, Aufgabe 4(a) unter Verwendung von (a).
Die Matrix D muss aus Dimensionsgründen eine 3×3-Matrix sein, da die Vektoren $y \in \mathbb{R}^3$ und $x \in \mathbb{R}^3$ beides 3-dimensionale Vektoren sind.
Seien $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ und $d = \left(\begin{smallmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\|d\| = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$.

Es muss daher gelten

$$
\begin{aligned}
y &= \cos(\alpha)x + (1-\cos(\alpha))(d\cdot x)d + \sin(\alpha)(d\times x)\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\alpha)x_1\\ \cos(\alpha)x_2\\ \cos(\alpha)x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(1-\cos(\alpha))\cdot(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3)\cdot d_1\\ (1-\cos(\alpha))\cdot(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3)\cdot d_2\\ (1-\cos(\alpha))\cdot(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3)\cdot d_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sin(\alpha)\cdot(d_2x_3-d_3x_2)\\ \sin(\alpha)\cdot(d_3x_1-d_1x_3)\\ \sin(\alpha)\cdot(d_1x_2-d_2x_1)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\alpha)x_1+(1-\cos(\alpha))\cdot(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3)\cdot d_1+\sin(\alpha)\cdot(d_2x_3-d_3x_2)\\ \cos(\alpha)x_2+(1-\cos(\alpha))\cdot(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3)\cdot d_2+\sin(\alpha)\cdot(d_3x_1-d_1x_3)\\ \cos(\alpha)x_3+(1-\cos(\alpha))\cdot(d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3)\cdot d_3+\sin(\alpha)\cdot(d_1x_2-d_2x_1)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}(\cos(\alpha)+(1-\cos(\alpha))d_1^2)\,x_1+((1-\cos(\alpha))d_1d_2-\sin(\alpha)d_3)\,x_2+((1-\cos(\alpha))d_1d_3+\sin(\alpha)d_2)\,x_3\\ ((1-\cos(\alpha))d_1d_2+\sin(\alpha)d_3)x_1+(\cos(\alpha)+(1-\cos(\alpha))d_2^2)x_2+((1-\cos(\alpha))d_2d_3-\sin(\alpha)d_1)x_3\\ ((1-\cos(\alpha))d_1d_3-\sin(\alpha)d_2)x_1+((1-\cos(\alpha))d_2d_3+\sin(\alpha)d_1)x_2+(\cos(\alpha)+(1-\cos(\alpha))d_3^2)x_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}d_{11}x_1+d_{12}x_2+d_{13}x_3\\ d_{21}x_1+d_{22}x_2+d_{23}x_3\\ d_{31}x_1+d_{32}x_2+d_{33}x_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12} & d_{13}\\ d_{21} & d_{22} & d_{23}\\ d_{31} & d_{32} & d_{33}\end{pmatrix}}_{=D}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}}_{=x}.
\end{aligned}
$$

Daraus erhält man

$$
\begin{aligned}
d_{11} &= \cos(\alpha)+(1-\cos(\alpha))d_1^2,\\
d_{12} &= (1-\cos(\alpha))d_1d_2-\sin(\alpha)d_3,\\
d_{13} &= (1-\cos(\alpha))d_1d_3+\sin(\alpha)d_2,\\
d_{21} &= (1-\cos(\alpha))d_1d_2+\sin(\alpha)d_3,\\
d_{22} &= \cos(\alpha)+(1-\cos(\alpha))d_2^2,\\
d_{23} &= (1-\cos(\alpha))d_2d_3-\sin(\alpha)d_1,\\
d_{31} &= (1-\cos(\alpha))d_1d_3-\sin(\alpha)d_2,\\
d_{32} &= (1-\cos(\alpha))d_2d_3+\sin(\alpha)d_1,\\
d_{33} &= \cos(\alpha)+(1-\cos(\alpha))d_3^2
\end{aligned}
$$

und kann die Struktur von D direkt ablesen zu

$$
D = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)+(1-\cos(\alpha))d_1^2 & (1-\cos(\alpha))d_1d_2-\sin(\alpha)d_3 & (1-\cos(\alpha))d_1d_3+\sin(\alpha)d_2\\ (1-\cos(\alpha))d_1d_2+\sin(\alpha)d_3 & \cos(\alpha)+(1-\cos(\alpha))d_2^2 & (1-\cos(\alpha))d_2d_3-\sin(\alpha)d_1\\ (1-\cos(\alpha))d_1d_3-\sin(\alpha)d_2 & (1-\cos(\alpha))d_2d_3+\sin(\alpha)d_1 & \cos(\alpha)+(1-\cos(\alpha))d_3^2\end{pmatrix},
$$

sodass gilt

$$
y = Dx.
$$

Dies lässt sich mit den beiden Matrixdefinitionen

$$
D_1 := \begin{pmatrix}d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3\\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3\\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_2 := \begin{pmatrix}0 & -d_3 & d_2\\ d_3 & 0 & -d_1\\ -d_2 & d_1 & 0\end{pmatrix}
$$

einfacher und kompakter schreiben als

$$D = \cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1 + \sin(\alpha)D_2.$$

(c) Es gilt $D_1^T = D_1$ und $D_2^T = -D_2$, da

$$D_1^T = \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 \end{pmatrix} = D_1,$$

$$D_2^T = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & d_3 & -d_2 \\ -d_3 & 0 & d_1 \\ d_2 & -d_1 & 0 \end{pmatrix} = -D_2.$$

Unter Verwendung von $\|d\| = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ findet man $D_1^2 = D_1$ und $D_2^2 = D_1 - \mathbb{I}_3$, da

$$\begin{aligned}
D_1^2 &= \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1^4 + d_1^2d_2^2 + d_1^2d_3^2 & d_1^3d_2 + d_1d_2^3 + d_1d_2d_3^2 & d_1^3d_3 + d_1d_2^2d_3 + d_1d_3^3 \\ d_1^3d_2 + d_1d_2^3 + d_1d_2d_3^2 & d_1^2d_2^2 + d_2^4 + d_2^2d_3^2 & d_1^2d_2d_3 + d_2^3d_3 + d_2d_3^3 \\ d_1^3d_3 + d_1d_2^2d_3 + d_1d_3^3 & d_1^2d_2d_3 + d_2^3d_3 + d_2d_3^3 & d_1^2d_3^2 + d_2^2d_3^2 + d_3^4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1^2(d_1^2+d_2^2+d_3^2) & d_1d_2(d_1^2+d_2^2+d_3^2) & d_1d_3(d_1^2+d_2^2+d_3^2) \\ d_1d_2(d_1^2+d_2^2+d_3^2) & d_2^2(d_1^2+d_2^2+d_3^2) & d_2d_3(d_1^2+d_2^2+d_3^2) \\ d_1d_3(d_1^2+d_2^2+d_3^2) & d_2d_3(d_1^2+d_2^2+d_3^2) & d_3^2(d_1^2+d_2^2+d_3^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 \end{pmatrix} = D_1, \\
D_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -d_3^2 - d_2^2 & d_2d_1 & d_3d_1 \\ d_1d_2 & -d_3^2 - d_1^2 & d_3d_2 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & -d_2^2 - d_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^2 - 1 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 - 1 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 - 1 \end{pmatrix} = D_1 - \mathbb{I}_3.
\end{aligned}$$

Weiter gilt auch, dass $D_1D_2 = 0 = D_2D_1$ ist, da

$$\begin{aligned}
D_1D_2 &= \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 \end{pmatrix} = D_2D_1.
\end{aligned}$$

Die beiden Matrizen D_1 und D_2 kommutieren somit. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
D^T D &= (\cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1 + \sin(\alpha)D_2)^T \cdot (\cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1 + \sin(\alpha)D_2) \\
&= \left(\cos(\alpha)\mathbb{I}_3^T + (1-\cos(\alpha))D_1^T + \sin(\alpha)D_2^T\right) \cdot (\cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1 + \sin(\alpha)D_2) \\
&= (\cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1 - \sin(\alpha)D_2) \cdot (\cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1 + \sin(\alpha)D_2) \\
&= (\cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1)^2 - \sin^2(\alpha)D_2^2 \\
&= \cos(\alpha)^2\mathbb{I}_3 + 2(1-\cos(\alpha))\cos(\alpha)D_1 + (1-\cos(\alpha))^2 D_1^2 - \sin^2(\alpha)D_2^2 \\
&= \cos(\alpha)^2\mathbb{I}_3 + 2(1-\cos(\alpha))\cos(\alpha)D_1 + (1-\cos(\alpha))^2 D_1 - \sin^2(\alpha)(D_1 - \mathbb{I}_3) \\
&= \cos(\alpha)^2\mathbb{I}_3 + 2(1-\cos(\alpha))\cos(\alpha)D_1 + (1-\cos(\alpha))^2 D_1 - \sin^2(\alpha)D_1 + \sin^2(\alpha)\mathbb{I}_3) \\
&= (\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2)\mathbb{I}_3 + (2(1-\cos(\alpha))\cos(\alpha) + (1-\cos(\alpha))^2 - \sin^2(\alpha))D_1 \\
&= \mathbb{I}_3 + ((2-2\cos(\alpha))\cos(\alpha) + 1 - 2\cos(\alpha) + \cos(\alpha)^2 - \sin^2(\alpha))D_1 \\
&= \mathbb{I}_3 + (2\cos(\alpha) - 2\cos^2(\alpha) + 1 - 2\cos(\alpha) + \cos(\alpha)^2 - \sin^2(\alpha))D_1 \\
&= \mathbb{I}_3 + (1 - \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))D_1 \\
&= \mathbb{I}_3 + 0 \cdot D_1 \\
&= \mathbb{I}_3
\end{aligned}$$

und die Matrix D ist daher per Definition orthogonal.
Im vierten Schritt in der obigen Rechnung haben wir die 3. Binomische Formel

$$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$$

mit $a := \cos(\alpha)\mathbb{I}_3 + (1-\cos(\alpha))D_1$ und $b := \sin(\alpha)D_2$ verwendet, welche nur gilt, weil die beiden Matrizen D_1 und D_2 kommutieren ($D_1D_2 = D_2D_1$), da nur dann

$$\begin{aligned}
(xD_1 - yD_2)\cdot(xD_1 + yD_2) &= x^2D_1^2 + xyD_1D_2 - yxD_2D_1 - y^2D_2^2 \\
&= x^2D_1^2 + xyD_1D_2 - xyD_1D_2 - y^2D_2^2 \\
&= x^2D_1^2 - y^2D_2^2 \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Im fünften Schritt verwendeten wir die 1. Binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

mit $a := \cos(\alpha)\mathbb{I}_3$ und $b := (1-\cos(\alpha))D_1$.
Im neunten Schritt verwendeten wir die 2. Binomische Formel

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

mit $a := 1$ und $b := \cos(\alpha)$.
Im neunten und zwölften Schritt verwendeten wir den trigonometrischen Pythagoras Satz

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$