

# Lösung Serie 11

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 16. Dezember um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool (link über <https://metaphor.ethz.ch/x/2022/hs/401-0171-00L/>).

1. Betrachten Sie die Menge  $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  der Paare positiver, reeller Zahlen, gegeben als Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 \quad \text{mit} \quad a_1 \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty) \quad \text{und} \quad a_2 \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty).$$

Die Addition auf  $\mathbb{R}_+^2$  sei folgendermassen definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden betrachten wir drei verschiedene Definitionen der Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

1. Definition:  $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$

2. Definition:  $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 \\ e^\lambda x_2 \end{pmatrix}.$

3. Definition:  $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}.$

Welche der folgenden Behauptungen sind korrekt?

Die Menge  $\mathbb{R}_+^2$  ist ein Vektorraum mit der oben definierten Addition und Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda$  gemäss der ...

- (a) 1. Definition.
- (b) 2. Definition.
- (c) 3. Definition.

**Lösung:** Korrekt ist nur (c), da:

(a) 1. Definition.

*Falsch, da z.B. für  $\lambda < 0$  gilt*

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}_+^2,$$

*weil  $\lambda x_1 < 0$  und  $\lambda x_2 < 0$  und daher  $\lambda x_1 \notin \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda x_2 \notin \mathbb{R}_+$ . Dies gilt, da  $x_1 > 0$  und  $x_2 > 0$  ist.*

*Die Vektorraumaxiome fordern jedoch, dass die Skalarmultiplikation mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine Abbildung von*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2 \text{ nach } \mathbb{R}_+^2 \quad \text{mit} \quad \left( \lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

*sein muss. Dies ist somit nicht erfüllt.*

(b) 2. Definition.

*Falsch, z.B. ist das Distributivgesetz*

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 y_1 \\ e^\lambda x_2 y_2 \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} e^{2\lambda} x_1 y_1 \\ e^{2\lambda} x_2 y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 e^\lambda y_1 \\ e^\lambda x_2 e^\lambda y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 \\ e^\lambda x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^\lambda y_1 \\ e^\lambda y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda x + \lambda y \quad \text{mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+ \text{ und } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

*für  $\lambda \neq 0$  nicht erfüllt, da dann  $e^\lambda \neq e^{2\lambda}$  gilt. In der obigen Berechnung haben wir die oben gegebene spezielle Addition und die Multiplikation der 2. Definition je zweimal verwendet.*

*Die Beziehung*

$$1 \cdot x = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2$$

ist ebenfalls nicht erfüllt, da

$$1 \cdot x = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 x_1 \\ e^1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e x_1 \\ e x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x.$$

✓ (c) 3. Definition.

Richtig, es werden alle Vektorraumaxiome erfüllt:

(1) Es gilt:  $\mathbb{R}_+^2 \neq \emptyset$  und

$$+ : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$$

$$(x, y) = \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto x + y = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2$$

ist wohldefiniert, da  $x_1 y_1 > 0$  und  $x_2 y_2 > 0$ , wenn  $x_1 > 0$  und  $x_2 > 0$  gilt.  
Ebenfalls gilt

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$$

$$(\lambda, x) = \left( \lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \lambda x = \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2$$

und dies ist wohldefiniert für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ , da  $x_1^\lambda > 0$  und  $x_2^\lambda > 0$ , wenn  $x_1 > 0$  und  $x_2 > 0$  ist.

(2) Kommutativgesetz der Addition:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 x_1 \\ y_2 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^2.$$

(3) Assoziativgesetz der Addition:

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^2. \end{aligned}$$

(4) Der Nullvektor dieser Vektorraumstruktur ist

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da

$$x + 0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot 1 \\ x_2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^2.$$

(5) Das additiv inverse Element “ $-x$ ” zu  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2$  ist gegeben durch

$$-x = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} \end{pmatrix},$$

weil

$$x + (-x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot \frac{1}{x_1} \\ x_2 \cdot \frac{1}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^2.$$

Das additiv inverse Element  $-x = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} \end{pmatrix}$  ist wohldefiniert, da  $x_1 \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$  und  $x_2 \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$  nicht gleich 0 sein können.

(6) 1. Gesetz der Skalarmultiplikation:

$$(\alpha\beta)x = (\alpha\beta) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha\beta} \\ x_2^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} x_1^\beta \\ x_2^\beta \end{pmatrix} \right)^\alpha = \alpha \begin{pmatrix} x_1^\beta \\ x_2^\beta \end{pmatrix} = \alpha \left( \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \alpha(\beta x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(7) 2. Gesetz der Skalarmultiplikation:

$$(\alpha + \beta)x = (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha+\beta} \\ x_2^{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\alpha x_1^\beta \\ x_2^\alpha x_2^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^\beta \\ x_2^\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha x + \beta x$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ and } \forall x \in \mathbb{R}_+^2.$

(8) *Distributivgesetz der Addition und Skalarmultiplikation:*

$$\begin{aligned}\lambda(x + y) &= \lambda \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + y_1) \\ \lambda(x_2 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ \lambda x_2 + \lambda y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda x + \lambda y \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ and } \forall x, y \in \mathbb{R}_+^2.\end{aligned}$$

(9) *Skalare Multiplikation mit 1:*

$$1 \cdot x = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 \\ 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^2.$$

## 2. *Spatprodukt in $\mathbb{R}^3$*

Es seien  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  drei Spaltenvektoren. Das *Spatprodukt*  $S(a, b, c)$  dieser drei Vektoren  $a, b, c$  ist dann definiert als

$$S(a, b, c) := (a \times b) \cdot c.$$

- (a) Beweisen Sie, dass  $S(a, b, c) = \det(a, b, c)$  gilt.
- (b) Beweisen Sie, dass  $|S(a, b, c)|$  das Volumen des von  $a, b$  und  $c$  aufgespannten Parallelepipedes (Spat) ist.
- (c) Was sagt das Vorzeichen von  $S(a, b, c)$  aus?

**Lösung:** Es seien die drei Vektoren  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Es gilt nach Aufgabe 4 in der Serie 5, dass

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Zudem ist

$$\begin{aligned} \det(a, b, c) &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot b_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot c_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1 \cdot (b_2 c_3 - c_2 b_3) - b_1 \cdot (a_2 c_3 - c_2 a_3) + c_1 \cdot (a_2 b_3 - b_2 a_3) \\ &= a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1, \end{aligned}$$

nach einer Entwicklung nach der 1. Zeile. Diese Formel sollte man auf seiner Zusammenfassung aufschreiben.

Daher gilt

$$\begin{aligned} S(a, b, c) &= (a \times b) \cdot c \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= c_1 \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 \cdot (a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3 \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2 + c_2 a_3 b_1 - c_2 a_1 b_3 + c_3 a_1 b_2 - c_3 a_2 b_1 \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \det(a, b, c). \end{aligned}$$

(b) Für das Volumen  $V$  des von  $a, b$  und  $c$  aufgespannten Parallelepipeds gilt

$$V = G \cdot h,$$

wobei  $G$  die Grundfläche und  $h$  die Höhe ist. Nach Serie 5, Aufgabe 4(d) gilt für die Grundfläche  $G$  mit Seiten  $a$  und  $b$  die Formel

$$G = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\varphi) = \|a \times b\|,$$

wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen den beiden Vektoren  $a$  und  $b$  ist.  
Für die Höhe  $h$  gilt

$$h = \|c\| \cdot \cos(\alpha),$$

wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen  $c$  und einem Vektor  $\vec{n}$  ist, der senkrecht auf  $a$  und  $b$  steht, also senkrecht zur Ebene, die von den beiden Vektoren  $a$  und  $b$  aufgespannt wird. Ausserdem soll  $\vec{n}$  auf derselben Seite der Ebene liegen wie der Vektor  $c$ , was nur ist, damit  $h$  positiv ist. Genau einer der beiden Vektoren ( $a \times b$ ) oder  $-(a \times b)$  ist so ein Vektor  $\vec{n}$ , unter der Annahme, dass  $a \times b \neq 0$ . Im Fall  $a \times b = 0$  ist die Grundfläche  $G = 0$ , das Volumen  $V = 0$  und  $S = 0$  und die Formel also korrekt. Der Winkel zwischen  $c$  und  $a \times b$  ist entweder  $\alpha$  oder  $\pi - \alpha$  und es gilt  $\cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha)$ . Daher gilt

$$\begin{aligned} V &= G \cdot h \\ &= \|a \times b\| \cdot \|c\| \cdot \cos(\alpha) \\ &= \pm(a \times b) \cdot c \\ &= |S(a, b, c)|, \end{aligned}$$

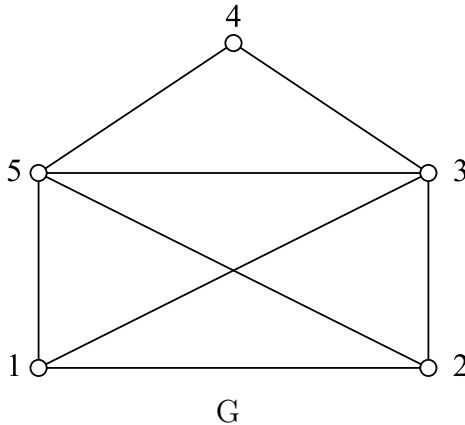
wobei wir die Formel

$$x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\phi)$$

aus Serie 5, Aufgabe 4(d) im Hinweis mit  $x := a \times b$ ,  $y := c$  und  $\phi := \alpha$  verwendet haben, wobei  $\phi$  der Winkel zwischen  $x$  und  $y$  ist.

- (c) Es gilt  $S(a, b, c) > 0$  genau dann, wenn das Tripel  $(a, b, c)$  positiv orientiert ist, d.h. genau dann, wenn es die Drei-Finger-Regel ([de.wikipedia.org/wiki/Drei-Finger-Regel](https://de.wikipedia.org/wiki/Drei-Finger-Regel)) erfüllt. Dies gilt, da die drei Vektoren  $(a, b, a \times b)$  die Drei-Finger-Regel bekanntlich erfüllen und  $S(a, b, c) = (a \times b) \cdot c > 0$ , genau dann, wenn  $a \times b$  und  $c$  dieselbe Orientierung haben (= auf derselben Seite der von  $a$  und  $b$  aufgespannten Ebene liegen). Daraus folgt, dass auch das Tripel  $(a, b, c)$  die Drei-Finger-Regel ebenfalls erfüllt.

3. Wir interpretieren den Graphen  $G$



aus Serie 10, Aufgabe 4 als elektrisches Netzwerk, wobei jede Kante einem Widerstand von  $R_0 = 1\Omega$  entspricht. Berechnen Sie den Widerstand  $R$  zwischen den Knoten 1 und 5 mit Hilfe der Formel

$$R = R_0 \frac{\tau_{1,5}}{\tau},$$

wobei  $\tau$  die Anzahl der aufspannenden Bäume von  $G$  ist und  $\tau_{1,5}$  die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 enthalten. Verwenden Sie dazu die Formel aus Serie 10, Aufgabe 4.

*Hinweis:* Die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 *nicht* enthalten, ist gleich der Anzahl der aufspannenden Teilbäume des Graphen, den man erhält, wenn man die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 löscht.

**Lösung:** In Serie 10, Aufgabe 4(a) haben wir berechnet, dass für die Anzahl  $\tau$  der aufspannenden Bäume im Graphen  $G$  gilt:  $\tau = 40$ .

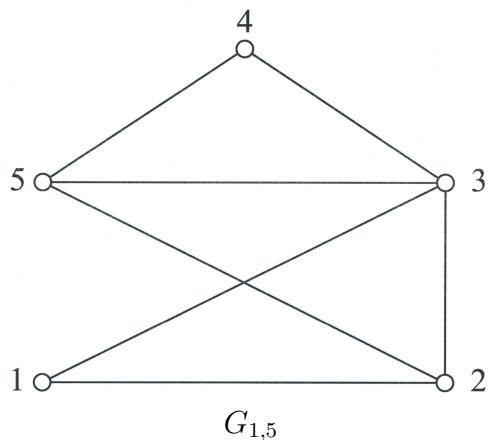
Ausserdem gilt

$$\tau_{1,5} = \tau - \tau'_{1,5},$$

wobei  $\tau'_{1,5}$  die Anzahl der aufspannenden Teilbäume des Graphen  $G_{1,5}$  ist, den man erhält, wenn man die Kante in  $G$  zwischen den Knoten 1 und 5 löscht.



Der Graph  $G_{1,5}$  sieht folgendermassen aus:



Für  $G_{1,5}$  hat man die Adjazenzmatrix

$$A^{G_{1,5}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A^G \text{ (without cancellations)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Matrix

$$D^{G_{1,5}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-1 \end{pmatrix}}_{=D^G \text{ (in black)}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

woraus wir den folgenden Laplace-Operator

$$\begin{aligned}
 L^{G_{1,5}} &= D^{G_{1,5}} - A^{G_{1,5}} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

für den Graphen  $G_{1,5}$  berechnen.

Durch Berechnen des  $(3,3)$ -Kofaktors  $\tilde{a}'_{33}$  von  $L^G$  erhalten wir mit Kirchhoff's-Matrix-Tree-

Theorem aus Serie 10, Aufgabe 4(a), dass

$$\begin{aligned}
\tau'_{1,5} &= \tilde{a}'_{33} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cancel{-1} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & \cancel{-1} & 0 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{4} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 0 & 0 & \cancel{-1} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \cancel{-1} & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{1.Z \leftrightarrow 2.Z}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(-1) \times (1.Z)}{=} (-1) \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{2.Z - 2 \times (1.Z)}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{E^{1,S}}{=} \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + 0 + 0 + 0 \\
&= 5 \cdot 2 \cdot 3 + 0 + 0 - 5 \cdot (-1) \cdot (-1) - 0 - (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \\
&= 30 - 5 - 4 \\
&= 21,
\end{aligned}$$

wobei wir erneut die Formel

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

für die Determinante von  $3 \times 3$ -Matrizen verwendet haben.

Folglich gilt für den Widerstand  $R$  zwischen den Knoten 1 und 5, mit der in der Aufgaben-

stellung gegebenen Formel, dass

$$\begin{aligned}
 R &= R_0 \frac{\tau_{1,5}}{\tau} \\
 &= R_0 \frac{\tau - \tau'_{1,5}}{\tau} \\
 &= \frac{40 - 21}{40} \Omega \\
 &= \frac{19}{40} \Omega.
 \end{aligned}$$

#### 4. Vandermonde-Determinante

(a) Für die Vandermonde-Determinante gilt die Formel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Verifizieren Sie diese Formel für den Fall  $n = 3$ .

(b) Für die Fläche  $F_{\Delta(a,b,c)}$  eines ebenen Dreiecks  $\Delta(a, b, c)$  mit den Seiten  $a, b, c$  gilt bekanntlich die Flächenformel von Heron

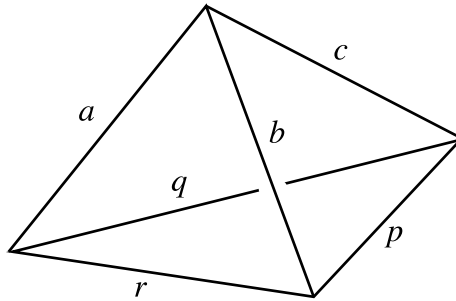
$$F_{\Delta(a,b,c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$  der halbe Umfang des Dreiecks  $\Delta(a, b, c)$  ist. Man kann zeigen, dass die Formel

$$F_{\Delta(a,b,c)}^2 = -\frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

denselben Wert für  $F_{\Delta(a,b,c)}$  ergibt.

Für das Volumen  $V_{\Delta(a,b,c,p,q,r)}$  eines Tetraeders  $\Delta(a, b, c, p, q, r)$  mit den Kantenlängen  $a, b, c, p, q, r$



$\Delta(a, b, c, p, q, r)$

gilt eine ähnliche Formel, nämlich

$$V_{\Delta(a,b,c,p,q,r)}^2 = \frac{1}{2^5 3^2} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & r^2 & q^2 & 1 \\ b^2 & r^2 & 0 & p^2 & 1 \\ c^2 & q^2 & p^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welchen Inhalt  $V_{\Delta(a,b,c,p,q,r)}$  hat das Tetraeder  $\Delta(a, b, c, p, q, r)$  mit den Kantenlängen  $a = 1, b = 2, c = 3, p = 4, q = 3$  und  $r = 2$ ?

**Lösung:**

- (a) Man zeigt im Fall  $n = 3$  z.B. mit der Regel von Sarrus ([de.wikipedia.org/wiki/Regel\\_von\\_Sarrus](https://de.wikipedia.org/wiki/Regel_von_Sarrus)) oder mit der Determinantenformel für  $3 \times 3$ -Matrizen

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1,$$

mit  $a_1 = a_2 = a_3 = 1, b_1 = x_1, b_2 = x_2, b_3 = x_3$  und  $c_1 = x_1^2, c_2 = x_2^2, c_3 = x_3^2$ , dass

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 + 1 \cdot x_3 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_1 \cdot x_2^2 - 1 \cdot x_3 \cdot x_2^2 - 1 \cdot x_1 \cdot x_3^2 - 1 \cdot x_2 \cdot x_1^2 \\ &= x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2 + x_1 x_2^2 - x_3 x_2^2 - x_1 x_3^2 - x_2 x_1^2 \\ &= x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 + x_3 x_1^2 - x_3 x_2^2 - x_1 x_3^2 - x_2 x_1^2. \end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man auch durch Ausmultiplizieren von

$$\begin{aligned}
\prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_j - x_i) &= \prod_{(i,j)=(1,2),(1,3),(2,3)} (x_j - x_i) \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\
&= (x_2 - x_1)(x_3^2 - x_3x_2 - x_1x_3 + x_1x_2) \\
&= x_2x_3^2 - x_2x_3x_2 - x_2x_1x_3 + x_2x_1x_2 - x_1x_3^2 + x_1x_3x_2 + x_1^2x_3 - x_1^2x_2 \\
&= x_2x_3^2 - x_3x_2^2 - x_1x_2x_3 + x_1x_2^2 - x_1x_3^2 + x_1x_2x_3 + x_3x_1^2 - x_2x_1^2 \\
&= x_2x_3^2 + x_1x_2^2 + x_3x_1^2 - x_3x_2^2 - x_1x_3^2 - x_2x_1^2,
\end{aligned}$$

da  $(i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$  die einzigen Paare sind, die die drei gegebenen Ungleichungen  $1 \leq i < j \leq 3$  erfüllen. Die Paare  $(i, j) = (1, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$  erfüllen die Ungleichungen  $1 \leq i < j \leq 3$  nicht.

Die obigen Rechnungen beweisen die Formel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_j - x_i)$$

für die Vandermonde-Determinante im Fall  $n = 3$ .

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{1.Z-2.Z}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \stackrel{1.S-2.S}{=} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \stackrel{E1.S}{=} (-1)^{1+1} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \quad + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & = (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \stackrel{2.Z-1.Z}{=} \stackrel{3.Z-1.Z}{=} (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & -4 & 7 & 0 \\ 9 & 12 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \stackrel{E1.S}{=} \stackrel{E1.Z}{=} (-1)^{1+4} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 9 & 12 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 16 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 9 & 12 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 16 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & = 2(4 \cdot 12 \cdot 1 + 9 \cdot 1 \cdot 7 + 1 \cdot (-4) \cdot (-9) - 4 \cdot 1 \cdot (-9) - 9 \cdot (-4) \cdot 1 - 1 \cdot 12 \cdot 7) \\
 & \quad - (0 + 16 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 16 \cdot 1 - 0 - 0 - 0) \\
 & = 2(48 + 63 + 36 + 36 + 36 - 84) - (16 + 16) \\
 & = 2 \cdot 135 - 32 \\
 & = 270 - 32 \\
 & = 238,
 \end{aligned}$$

wobei  $Z$  für Zeile,  $S$  für Spalte und  $E$  für Entwicklung nach einer Zeile  $Z$  oder Spalte  $S$  steht.

In der obigen Rechnung haben wir die Formel

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

für die Determinante von  $3 \times 3$ -Matrizen verwendet.

Dann gilt mit  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $p = 4$ ,  $q = 3$  und  $r = 2$ , dass

$$\begin{aligned} V_{\Delta(1,2,3,4,3,2)} &= \sqrt{\frac{1}{2^5 3^2} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & r^2 & q^2 & 1 \\ b^2 & r^2 & 0 & p^2 & 1 \\ c^2 & q^2 & p^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{a=1, b=2, c=3, p=4, q=3, r=2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^5 3^2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^5 3^2} \cdot 238} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^5 3^2} \cdot 2 \cdot 119} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^4 3^2} \cdot 119} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^4 3^2}} \sqrt{119} \\ &= \frac{1}{2^2 \cdot 3} \sqrt{119} \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{119}. \end{aligned}$$



**Bemerkung:**

Man berechnet, dass

$$\begin{aligned}
 F_{\Delta(a,b,c)} &= \sqrt{-\frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \\
 &= \sqrt{\left(-\frac{1}{16}\right) \cdot (-(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c))} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c) \frac{1}{2}(b+c-a) \frac{1}{2}(a+c-b) \frac{1}{2}(a+b-c)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c) \left(\frac{1}{2}(a+b+c) - a\right) \left(\frac{1}{2}(a+b+c) - b\right) \left(\frac{1}{2}(a+b+c) - c\right)} \\
 &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{mit } s = \frac{1}{2}(a+b+c),
 \end{aligned}$$

was die gegebene Formel für  $F_{\Delta(a,b,c)}$  in der Aufgabenstellung beweist, da das Resultat für die Fläche von  $\Delta(a,b,c)$  mit der Heron'schen Flächenformel übereinstimmt.

In der obigen Rechnung haben wir verwendet, dass

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &\stackrel{E_{1,Z}}{=} 0 + (-1)^{1+2} \cdot a^2 \cdot \det \begin{pmatrix} a^2 & c^2 & 1 \\ b^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot b^2 \cdot \det \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ b^2 & c^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} a^2 & 0 & c^2 \\ b^2 & c^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -a^2 \cdot \det \begin{pmatrix} a^2 & c^2 & 1 \\ b^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b^2 \cdot \det \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ b^2 & c^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a^2 & 0 & c^2 \\ b^2 & c^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -a^2 \cdot (0 + b^2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot c^2 \cdot 1 - a^2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 - 0) \\
&\quad + b^2 \cdot (0 + b^2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 - a^2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 - 1 \cdot c^2 \cdot 1) \\
&\quad - (a^2 \cdot c^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 1 \cdot c^2 + 0 - 0 - 0 - 1 \cdot c^2 \cdot c^2) \\
&= -a^2 \cdot (b^2 + c^2 - a^2) + b^2 \cdot (b^2 - a^2 - c^2) - (a^2 c^2 + b^2 c^2 - c^4) \\
&= -a^2 b^2 - a^2 c^2 + a^4 + b^4 - b^2 a^2 - b^2 c^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4 \\
&= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2 \\
&= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - 4b^2 c^2 \\
&= (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2 \\
&= (a^2 - b^2 - c^2)^2 + 2bc \cdot (a^2 - b^2 - c^2) - 2bc \cdot (a^2 - b^2 - c^2) - 4b^2 c^2 \\
&= (a^2 - b^2 - c^2) \cdot (a^2 - b^2 - c^2) + (a^2 - b^2 - c^2) \cdot 2bc - 2bc \cdot (a^2 - b^2 - c^2) - 2bc \cdot 2bc \\
&= (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc) \cdot (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) \\
&= -(-a^2 + b^2 + 2bc + c^2) \cdot (a^2 - c^2 - b^2 + 2bc) \\
&= -(ab + ac - a^2 + b^2 + bc - ab + bc + c^2 - ac) \cdot (a^2 + ab - ac + ac + bc - c^2 - ab - b^2 + bc) \\
&= -(ab + ac - a^2 + b^2 + bc - ba + cb + c^2 - ca) \cdot (a^2 + ab - ac + ca + cb - c^2 - ba - b^2 + bc) \\
&= -(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c),
\end{aligned}$$

wobei wir erneut die Formel

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

für die Determinante von  $3 \times 3$ -Matrizen und die Trinomische Formel

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

mit  $x := a^2$ ,  $y := -b^2$  und  $z := -c^2$  in der Berechnung verwendet haben.