Determinanten

Satz (Determinanten und LGS)

Sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann sind äquivalent:

i. A ist invertierbar
ii. $\det A \neq 0$
iii. $\mathrm{Rang}(A) = n$
iv. Das LGS $Ax = b$ ist für jedes b lösbar.
v. Das LGS $Ax = b$ besitzt genau eine Lösung.
vi. Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.

Korollar

Sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann gilt:

i. Das homogene LGS $Ax = 0$ hat genau dann nur die triviale Lösung, wenn $\det A \neq 0$.
ii. Das LGS $Ax = b$ ist genau dann für beliebiges b lösbar, wenn $\det A \neq 0$.
iii. Das LGS $Ax = b$ hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\det A \neq 0$.

Übersicht: Ist A eine $n \times n$-Matrix, so gilt

Rang(A)	det A	LGS	Effekt
$= n$	$\neq 0$	$Ax = 0$	hat nur die triviale Lösung
$< n$	$= 0$	$Ax = 0$	hat unendlich viele Lösungen
$= n$	$\neq 0$	$Ax = b$	hat für beliebiges b genau eine Lösung
$< n$	$= 0$	$Ax = b$	hat je nach b keine oder unendlich viele Lösungen

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit Adjunkte $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})^T$. Aus dem Entwicklungssatz folgt $\det A = (A\tilde{A})_{ii}$. Z.B. für $n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\
&= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} \\
&= (A)_{11}(\tilde{A})_{11} + (A)_{12}(\tilde{A})_{21} + (A)_{13}(\tilde{A})_{31} = (A\tilde{A})_{11}
\end{aligned}$$

Dann ist z.B.

$$\begin{aligned}
(A\tilde{A})_{21} &= (A)_{21}(\tilde{A})_{11} + (A)_{22}(\tilde{A})_{21} + (A)_{23}(\tilde{A})_{31} \\
&= \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$A\tilde{A} = \mathbb{I} \det(A)$$

Satz

Ist $\tilde{A}$ die Adjunkte einer regulären Matrix, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\tilde{A}$$

Bemerkung: Dies ist keine effiziente Methode zur Berechnung der Inversen.

Vektorräume

Definition

Sei V eine nichtleere Menge. Dann heisst V ein **reeller Vektorraum**, wenn eine innere Operation (Addition)

$$\begin{array}{rcccl} + & : & V \times V & \to & V \\ & & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$

und eine äussere Operation (Multiplikation mit einem Skalar)

$$\begin{array}{rcccl} \cdot & : & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & & (\alpha,a) & \mapsto & \alpha a \end{array}$$

definiert sind, so dass folgende Axiome gelten:

Definition (Fortsetzung)

A1 $\forall u, v \in V\colon\ u + v = v + u$

A2 $\forall u, v, w \in V\colon\ (u + v) + w = u + (v + w)$

A3 $\exists 0 \in V$ so, dass $\forall u \in V\colon\ u + 0 = u$

A4 $\forall u \in V\ \exists -u \in V$ so, dass $u + (-u) = 0$

M1 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V\colon\ (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

M2 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V\colon\ (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ und $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

M3 $\forall u \in V\colon\ 1u = u$

Der Vektor $0 \in V$ heisst **Nullvektor**.
Ein **komplexer VR** ist entsprechend, mit $\mathbb{C}$ an Stelle von $\mathbb{R}$, definiert.

Bemerkung: Für zwei Mengen A, B ist das **kartesische Produkt** die Menge aller geordneten Paare $A \times B := \{(a, b)\ :\ a \in A, b \in B\}$.

Beispiel

Die Menge V der Vektoren in der Ebene (im Raum) zusammen mit der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren ist ein reeller VR.

Beispiel

$\mathbb{R}^n := \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}\}$ mit der Addition

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

und der Multiplikation mit Skalaren

$$\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

ist ein reeller VR.

Analog ist

$$\mathbb{C}^n := \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{C}\}$$

ein komplexer VR. Und

$$\mathbb{Q}^n := \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{Q}\}$$

ist ein VR über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Beispiel

$\mathbb{R}^{m\times n}$, die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit reellen Koeffizienten, zusammen mit der Matrixaddition und der Multiplikation mit Skalaren, ist ein reeler VR.

Lemma

Sei V ein Vektorraum. Dann gilt

0. Es gibt nur einen Nullvektor in V.
1. $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} \implies \vec{b} = 0$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \vec{0} = \vec{0}$.
3. $\forall \vec{a} \in V$: $0\vec{a} = \vec{0}$.
4. $\forall \vec{a} \in V$: $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$