

## Definition

- ▶ Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix. Dann heißt  $A$  **invertierbar** oder **regulär** falls eine  $n \times n$ -Matrix  $X$  existiert, so dass  $AX = \mathbb{I}_n$ .  $X$  heißt dann **Inverse** von  $A$ .
- ▶ Falls  $A$  nicht regulär ist, nennt man  $A$  **singulär**.

**Bemerkungen:** Sei  $A$  eine reguläre  $n \times n$ -Matrix. Dann gilt:

- ▶ Die Inverse ist eindeutig bestimmt.
- ▶ Die Lösung von  $Ax = b$  ist gegeben durch  $x = A^{-1}b$ .
- ▶ Bezeichnen wir mit  $e^{(k)}$  die  $k$ -te Spalte von  $\mathbb{I}_n$ , so ist die  $k$ -te Spalte von  $A^{-1}$  die Lösung von  $Ax = e^{(k)}$ .

## Gauss-Jordan Algorithmus zur Berechnung von $A^{-1}$

Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix. Führe das Gauss-Verfahren für die erweiterte Matrix

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

aus. Ist  $\text{Rang } A = n$  (und somit  $A$  invertierbar), so können mit Hilfe der Zeilenoperation (III) alle Pivots auf den Wert 1 normiert, und mit der Zeilenoperation (II) über den Pivots Nullen erzeugt werden. Danach steht im Schema linkerhand die Einheitsmatrix, und rechterhand  $A^{-1}$ .

## Beispiel

Wir bestimmen die Inverse von  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ . Startend

von

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

liefert das beschriebene Verfahren

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Somit  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

## Satz

Sind  $A$  und  $B$  invertierbare  $n \times n$ -Matrizen, so gilt

1.  $A^{-1}A = \mathbb{I}_n$ .
2.  $A^{-1}$  ist invertierbar und  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
3.  $\mathbb{I}$  ist invertierbar und  $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$ .
4.  $AB$  ist invertierbar und  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
5.  $A^T$  ist invertierbar und  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

## Satz

Für jede  $n \times n$ -Matrix  $A$  sind äquivalent:

1.  $A$  ist invertierbar.
2. Das Gleichungssystem  $Ax = b$  ist für jedes  $b$  lösbar.
3. Das Gleichungssystem  $Ax = 0$  hat nur die triviale Lösung.

# Orthogonale Matrizen

## Definition

Eine  $n \times n$ -Matrix heisst **orthogonal**, falls  $A^T A = \mathbb{I}_n$  gilt.

## Satz

Sind  $A$  und  $B$  orthogonale  $n \times n$ -Matrizen, so gilt:

1.  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = A^T$ .
2.  $A^{-1}$  ist orthogonal.
3.  $AB$  ist orthogonal.
4.  $\mathbb{I}_n$  ist orthogonal.

## Beobachtung

Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix. Dann sind äquivalent:

1.  $A$  ist orthogonal.
2. Die Spalten von  $A$  sind Einheitsvektoren und stehen paarweise senkrecht aufeinander.
3. Die Zeilen von  $A$  sind Einheitsvektoren und stehen paarweise senkrecht aufeinander.

## Eigenschaften

### Orthogonale Matrizen beschreiben Isometrien

Ist  $A$  eine orthogonale  $n \times n$ -Matrix, so gilt für jeden Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ax\| = \|x\|$$

Insbesondere erhält  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ , die Abstände von Punkten, ist also eine Kongruenzabbildung:

$$\|Ax - Ay\| = \|x - y\|$$

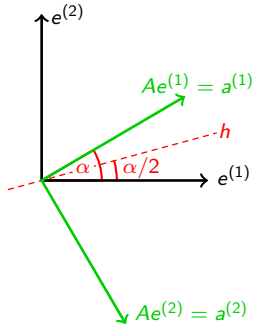
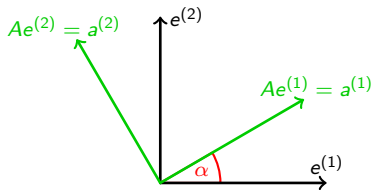
## Beispiel: Drehungen und Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$

Ist  $A$  eine orthogonale  $2 \times 2$ -Matrix, so ist  $A$  von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ Drehung um den Winkel } \alpha$$

oder

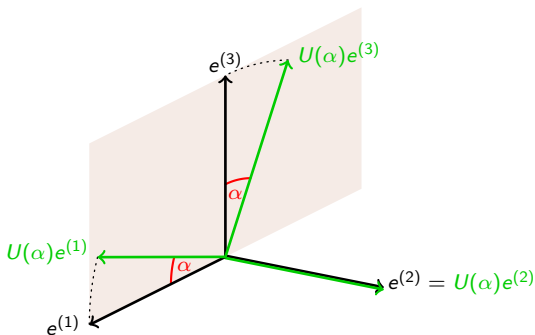
$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an Achse mit Steigung } \frac{\alpha}{2}$$



## Givens-Rotation

$$U(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ist für beliebiges  $\alpha \in \mathbb{R}$  eine orthogonale Matrix.



Drehung um die  $x_2$ -Achse um den Winkel  $\alpha$ .

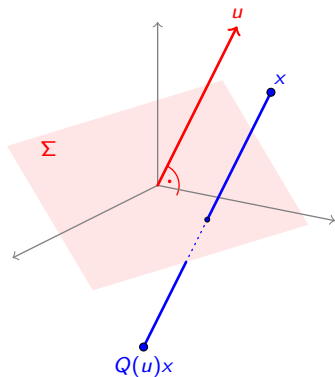


## Householder-Matrix

Sei  $u$  ein  $n$ -Spaltenvektor mit  $u^T u = 1$ . Dann ist

$$Q(u) := \mathbb{I}_n - 2uu^T$$

eine orthogonale Matrix.



Spiegelung an der Normalebene  $\Sigma$  zu  $u$ , denn  $Q(u) = Q(u)^T$  also  $Q(u)^2 = \mathbb{I}_n$  und für  $x \in \Sigma$  gilt  $Q(u)x = x$ .