Lösungen Ferienserie

Diese Ferienserie hat kein Abgabedatum und wird nicht korrigiert. Die Lösungen werden Mitte Januar veröffentlicht.

1. Finden Sie ein Erzeugendensystem des Lösungsraumes $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$ des Systems

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Lösung: Wir schreiben das System in Matrixform als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den Lösungsraum finden wir mit Gauss-Elimination:

$$\boxed{\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}} \xrightarrow[3.Z-1.Z]{2.Z-3\times(1.Z)} \boxed{\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}}$$

$$\xrightarrow{3.Z-\frac{2}{7}\times(2.Z)} \boxed{\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}} \xrightarrow{4.Z+3.Z} \boxed{\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{array}} \quad (*)$$

Wähle nun $x_5 = \alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, da $(*)$ in der untersten Zeile zwei Einträge besitzt.
Aus der letzten Zeile von $(*)$ wissen wir, dass

$$\frac{6}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 = 0$$

und es folgt

$$x_4 = \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{2}{7}x_5\right) = \frac{x_5}{3} = \frac{\alpha}{3}.$$

Weiter folgt aus der 3. Zeile, 2. Zeile und 1. Zeile von $(*)$, dass

$$-x_3 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 = 0 \Longrightarrow x_3 = -\frac{1}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 = -\frac{1}{7}\cdot\frac{\alpha}{3} - \frac{2}{7}\alpha = -\frac{1}{21}\alpha - \frac{6}{21}\alpha = -\frac{7}{21}\alpha = -\frac{\alpha}{3},$$

$$-7x_2 + 7x_3 - 10x_4 + 8x_5 = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{7}\left(7x_3 - 10x_4 + 8x_5\right) = \frac{1}{7}\underbrace{\left(-\frac{7}{3}\alpha - \frac{10}{3}\alpha + \frac{24}{3}\alpha\right)}_{=\frac{7}{3}\alpha} = \frac{\alpha}{3},$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \Longrightarrow x_1 = -2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = -\frac{2}{3}\alpha - \frac{\alpha}{3} - \frac{3}{3}\alpha + \frac{3}{3}\alpha = -\alpha$$

und die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des Systems ist somit gegeben durch

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha \\ \frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein mögliches Erzeugendensystem des Lösungsraums $\mathcal{L}$ ist also gegeben durch den Vektor

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

sowie nichttriviale Vielfache davon, da

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ \frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3} \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Betrachten Sie die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\},$$
$$V := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0,\ x_1 = x_4\}.$$

Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von

(a) U,

(b) V,

(c) $U \cap V$.

Lösung:

(a) $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$. Man kann also x_1, x_3 und x_4 als freie Parameter wählen. Damit ist $x_2 = 2x_3 - x_4$. Man kann U also schreiben als

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:a^{(1)}} + x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:a^{(2)}} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:a^{(3)}}. \end{aligned}$$

Die Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ sind offensichtlich ein Erzeugendensystem für U. Sie bilden sogar eine Basis für U, da der Vektorraum U dreidimensional ist, weil er von den drei Variablen x_1, x_3 und x_4 abhängt.

(b) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0,\, x_1 = x_4\}$. Man kann also x_3 und x_4 als freie Parameter wählen. Aus $x_1 = x_4$ folgt $x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = x_2 - 2x_3 = 0 \Longrightarrow x_2 = 2x_3$. Also gilt

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_4 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wie in **(a)** sieht man, dass $b^{(1)}, b^{(2)}$ ein Erzeugendensystem von V bildet mit

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_4 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:b^{(1)}} + x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:b^{(2)}} .
\end{aligned}
$$

Dieses Erzeugendensystem bildet sogar eine Basis für V, da der Vektorraum V zweidimensional ist, weil er von den zwei Variablen x_3 und x_4 abhängt.

(c) Für den Vektorraum $U \cap V$ werden alle drei Bedingungen (i), (ii) und (iii) von U und V zusammengenommen und wir erhalten

$$
U \cap V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \underbrace{x_2 - 2x_3 + x_4 = 0}_{(i)}, \underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0}_{(ii)}, \underbrace{x_1 = x_4}_{(iii)} \right\} .
$$

Es folgt

$$
x_1 = x_4 \implies x_2 \overset{(ii)}{=} 2x_3 \implies x_4 \overset{(i)}{=} 2x_3 - x_2 = 2x_3 - 2x_3 = 0 \overset{(iii)}{\implies} x_1 = 0.
$$

Somit kann nur die Variable x_3 als freier Parameter gewählt werden. Damit folgt

$$
U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:c^{(1)}} \in \mathbb{R}^4 \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}
$$

und daraus ergibt sich, dass der Vektor

$$
c^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

ein Erzeugendensystem von $U \cap V$ darstellt.
Dieses Erzeugendensystem bildet sogar eine Basis für $U \cap V$, da der Vektorraum $U \cap V$ eindimensional ist, weil er nur von der Variablen x_3 abhängt.

3. Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen mit dem Gaussverfahren, ob die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abhängig, linear unabhängig und ob sie erzeugend sind:

(a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$ (b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$ (d) $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$

Lösung: Betrachte die k Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ im Vektorraum V. Dann gilt

> $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ sind **linear unabhängig**, falls aus $x_1 a^{(1)} + \cdots + x_k a^{(k)} = 0$ folgt, dass $x_1 = \cdots = x_k = 0$ gilt.

Sonst heissen die Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ **linear abhängig**. Falls jeder Vektor b von V als Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ dargestellt werden kann, sind die Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ **erzeugend**.
In dieser Aufgabe ist $V = \mathbb{R}^n$ mit $n = 3$ oder $n = 4$ und wir können die Bestimmung von der linearen Abhängigkeit usw. mit Hilfe vom Gaussverfahren systematisieren:
Schreibe $A = (a^{(1)} \ \dots \ a^{(k)})$. A ist eine $n \times k-$Matrix, wobei n die Anzahl Zeilen ist. Mit dem Gauss-Schema können wir $r = \text{Rang}(A)$ finden.
Es gilt: die Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ sind:

- linear unabhängig, falls $r = k$.
- linear abhängig, falls $r < k$.
- erzeugend, falls $r = n$.

(a) Wir berechnen

$$\boxed{\begin{array}{cc}1&0\\1&0\\1&0\end{array}} \xrightarrow[3.Z-1.Z]{2.Z-1.Z} \boxed{\begin{array}{cc}1&0\\0&0\\0&0\end{array}} \quad \text{und damit gilt } \ n=3,\ k=2,\ r=1.$$

Da $r < k$ gilt, sind die Vektoren linear abhängig und da $r \neq n$ ist, sind sie nicht erzeugend.

(b) Wir berechnen

$$\boxed{\begin{array}{rrr}1&-1&1\\2&1&1\\3&-1&1\\-2&1&1\end{array}} \xrightarrow[4.Z+2\times(1.Z)]{\substack{2.Z-2\times(1.Z)\\3.Z-3\times(1.Z)}} \boxed{\begin{array}{rrr}1&-1&1\\0&3&-1\\0&2&-2\\0&-1&3\end{array}} \xrightarrow[4.Z+\frac{1}{3}\times(2.Z)]{3.Z-\frac{2}{3}\times(2.Z)} \boxed{\begin{array}{rrr}1&-1&1\\0&3&-1\\0&0&-\frac{4}{3}\\0&0&\frac{8}{3}\end{array}} \xrightarrow{4.Z+2\times(3.Z)} \boxed{\begin{array}{rrr}1&-1&1\\0&3&-1\\0&0&-\frac{4}{3}\\0&0&0\end{array}}$$

und damit gilt $n = 4$, $k = 3$ und $r = 3$.
Da $r = k$ sind die Vektoren linear unabhängig und da $r \neq n$ sind sie nicht erzeugend.

(c) Wir berechnen

$$\boxed{\begin{array}{rrr} 3 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{array}} \xrightarrow[3.Z-\frac{1}{3}\times(1.Z)]{2.Z-\frac{2}{3}\times(1.Z)} \boxed{\begin{array}{rrr} 3 & -4 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{16}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}} \xrightarrow{3.Z-\frac{16}{14}\times(2.Z)} \boxed{\begin{array}{rrr} 3 & -4 & -1 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{18}{7} \end{array}}$$

und damit gilt $n = 3$, $k = 3$ und $r = 3$.
Da $r = k$ gilt sind die Vektoren linear unabhängig und da $r = n$ gilt auch erzeugend.
Das heisst, diese drei Vektoren bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(d) Wir berechnen

$$\boxed{\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}} \xrightarrow[3.Z+1.Z]{2.Z+1.Z} \boxed{\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}} \xrightarrow{3.Z-2.Z} \boxed{\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}}$$

und damit gilt $n = 3$, $k = 4$ und $r = 3$.
Da $r < k$ sind die Vektoren linear abhängig und da $r = n$ gilt sind sie erzeugend.

4. Es seien

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

mit $\binom{x}{0} := 1$ die Binomialpolynome.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\}$ im Vektorraum aller Polynome linear unabhängig ist.

(b) P_2 bezeichne den Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Zeigen Sie, dass

$$P_2 = \operatorname{span}\left\{\binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2\right\}.$$

(c) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ so, dass

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = a_0\binom{x}{0} + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2}$$

gilt, wenn

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Aufgabe (c) kann entweder durch direkte Rechnung gelöst werden oder mit Hilfe der diskreten Taylor-Formel, welche für ein Polynom $p(x)$ vom Grad n besagt, dass

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k p(0) \binom{x}{k},$$

wobei $\Delta^0 p(x) := p(x)$, $\Delta^1 p(x) := p(x+1) - p(x)$ und $\Delta^k p(x) := \Delta^1(\Delta^{k-1} p(x))$ die diskreten Differenzenoperatoren sind.

Lösung:

(a) Seien $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit

$$\begin{aligned} a_0 \underbrace{\binom{x}{0}}_{=1} + a_1 \underbrace{\binom{x}{1}}_{=x} + a_2 \underbrace{\binom{x}{2}}_{=\frac{x(x-1)}{2}} &= 0 \\ \iff a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-1)}{2} &= 0 \\ \iff a_0 + \left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right) x + \frac{a_2}{2} x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich zeigt, dass $a_0 = 0$, $a_2 = 0 \implies a_1 = 0$ gilt und damit muss $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ gelten, damit die Gleichung stimmt. Folglich sind die $\binom{x}{k}$ für $0 \leq k \leq 2$ linear unabhängig und dies gilt sogar für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Sei $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in P_2$ mit $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ein allgemeines Polynom in P_2. Wir suchen reelle Zahlen $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = a_0 \underbrace{\binom{x}{0}}_{=1} + a_1 \underbrace{\binom{x}{1}}_{=x} + a_2 \underbrace{\binom{x}{2}}_{=\frac{x(x-1)}{2}}$$

gilt. Dies ist (vergleiche mit Teil **(a)**) äquivalent zu

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = a_0 + \left(a_1 - \frac{a_2}{2}\right) x + \frac{a_2}{2} x^2.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_2 &= \frac{a_2}{2}, \\ b_1 &= a_1 - \frac{a_2}{2} = a_1 - b_2 \end{aligned}$$

folgt, dass die Gleichung für

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 + b_2, \quad a_2 = 2b_2$$

erfüllt ist. Dies zeigt, dass

$$P_2 = \operatorname{span}\left\{ \binom{x}{k} : 0 \leq k \leq 2 \right\}$$

gilt.

(c) Aus Teil **(b)** wissen wir, dass die Gleichungen

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 + b_2, \quad a_2 = 2b_2$$

gelten und daher muss die gesuchte Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 + b_2 \\ 2b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_0 + a_{12}b_1 + a_{13}b_2 \\ a_{21}b_0 + a_{22}b_1 + a_{23}b_2 \\ a_{31}b_0 + a_{32}b_1 + a_{33}b_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

lauten.

Es folgt erneut mittels eines Koeffizientenvergleichs, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Bedingung erfüllt.

5.

(a) Wählen Sie, falls möglich, mit dem Gaussverfahren unter den folgenden sechs Vektoren mit Begründung eine Basis für $\mathbb{R}^3$ aus.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ 3-c \end{pmatrix}.$$

Wie hängt die Dimension des von diesen Vektoren aufgespannten Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter ab?

Lösung:

(a) Eine Basis besteht aus erzeugenden und linear unabhängigen Vektoren. Es muss also gelten, dass $r = k = n = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, wobei $r = \text{Rang}(A)$ ist mit der Matrix $A = (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ bestehend aus drei dieser sechs gegebenen Vektoren.
Wir schreiben nun alle sechs Vektoren in eine Matrix und wenden den Gauss-Algorithmus auf diese Matrix an und rechnen

$$\begin{array}{|cccccc|}\hline 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \underset{3.Z-1.Z}{\xrightarrow{2.Z-2\times(1.Z)}} \begin{array}{|cccccc|}\hline 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{3.Z-2.Z} \begin{array}{|cccccc|}\hline 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ \hline \end{array} \; (*)$$

Aus $(*)$ sehen wir, dass wir z.B. die Pivot-Vektoren oben an den Stellen 1, 2, 4 als Basis wählen können und erhalten daher als gesuchte Basis von $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir können statt $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (gegeben an der 2. Stelle oben) aber auch den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ an der 3. Stelle oben nehmen, sowie einer der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (gegeben an den Stellen 5 und 6 oben) anstatt $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (gegeben an der 4. Stelle oben).

(b) Sei U der von den drei Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Die Dimension $\dim(U)$ von U ist gleich der Anzahl Vektoren, die in U eine Basis bilden. Schreibe nun die drei gegebenen Vektoren in einer einzigen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass gilt:
Die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren von A ist gleich

$$r = \text{Rang}(A).$$

Eine Basis von U kann also höchstens aus r Vektoren bestehen (sonst sind sie nicht mehr linear unabhängig und bilden keine Basis). Es gilt also $d := \dim(U) \leq r$.

Wegen dem Satz 4.3 (i) aus dem Buch "K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage 2002" wissen wir zudem, dass mehr als $d = \dim(U)$ Vektoren linear abhängig in U sind. Es folgt also, dass $\dim(U) = \text{Rang}(A)$, somit können wir die Dimension von U mit dem Gaussverfahren berechnen.
Dazu berechnen wir

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \end{array}} \xrightarrow[3.Z-\frac{1+a}{a}\times(1.Z)]{2.Z-1.Z} \boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & 3-c+\frac{(1+a)c}{a} \end{array}} \xrightarrow{3.Z-\frac{2}{b}\times(2.Z)} \boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3-c+\frac{(1+a)c}{a} \end{array}}$$

Um die obigen Matrixmanipulationen durchzuführen benötigen wir, dass $a \neq 0$ und dass $b \neq 0$. Daher müssen wir Fallunterscheidungen machen.

<u>Fall $a = b = 0$</u>: Die obige Matrix vereinfacht sich und wir rechnen

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c \\ 1 & 2 & 3-c \end{array}} \xrightarrow{1.Z\leftrightarrow 3.Z} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c \end{array}} \xrightarrow{3.Z-2.Z} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3-c \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

- Falls $c = 0$, gilt $\dim(U) = r = 1$,
- falls $c \neq 0$, gilt $\dim(U) = r = 2$.

<u>Fall $a = 0, b \neq 0$</u>: Wir unterscheiden die zwei Fälle

- für <u>$c = 0$</u> vereinfacht sich die Matrix und es gilt

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}} \xrightarrow{1.Z\leftrightarrow 3.Z} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}} \text{ und damit gilt } \dim(U) = r = 2,$$

- für <u>$c \neq 0$</u> gilt

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -c \\ 0 & b & -c \\ 1 & 2 & 3-c \end{array}} \xrightarrow{1.Z\leftrightarrow 3.Z} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3-c \\ 0 & b & -c \\ 0 & 0 & -c \end{array}} \text{ und damit gilt } \dim(U) = r = 3.$$

<u>Fall $a \neq 0$</u>:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ a & b & -c \\ 1+a & 2 & 3-c \end{array}} \xrightarrow[3.Z-\frac{1+a}{a}\times(1.Z)]{2.Z-1.Z} \boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & 3+\frac{c}{a} \end{array}} \xrightarrow{2.Z\leftrightarrow 3.Z} \boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ 0 & 2 & 3+\frac{c}{a} \\ 0 & b & 0 \end{array}} \xrightarrow{3.Z-\frac{b}{2}\times(2.Z)} \boxed{\begin{array}{ccc} a & 0 & -c \\ 0 & 2 & 3+\frac{c}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{(3a+c)b}{2a} \end{array}}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- Falls $-\frac{(3a+c)b}{2a} = 0$, also falls $b = 0$ oder $c = -3a$: $\dim(U) = r = 2$,

- falls $\frac{(3a+c)b}{2a} \neq 0 : \dim(U) = r = 3.$

6. Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\}$ für $\mathbb{R}^3$, wobei

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Betrachten Sie den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Finden Sie die Koordinaten y_1, y_2, y_3, die x in der Basis $\mathcal{B}$ beschreiben, d.h.

$$x = y_1\, b^{(1)} + y_2\, b^{(2)} + y_3\, b^{(3)}.$$

(b) Es sei nun $v \in \mathbb{R}^3$ der Vektor mit Koordinaten $(1, -2, 2)^\top$ in der Basis $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$.

Lösung:

(a) Wir suchen $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ so, dass $x = y_1\, b^{(1)} + y_2\, b^{(2)} + y_3\, b^{(3)}$, d.h.

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} &= y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =: Ty. \end{aligned}$$

Man löst nun die Gleichung $x = Ty$ mit dem Gauss-Algorithmus und rechnet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{2.Z+1.Z} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{2.Z\leftrightarrow 3.Z} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

und daraus folgt nun

$$\begin{aligned} &3.\ \text{Zeile von } (*) : 3y_3 = -3 \Longrightarrow y_3 = -1, \\ &2.\ \text{Zeile von } (*) : 2y_2 - 3y_3 = -1 \Longrightarrow 2y_2 = -4 \Longrightarrow y_2 = -2, \\ &1.\ \text{Zeile von } (*) : y_1 + y_2 + y_3 = 1 \Longrightarrow y_1 = 4. \end{aligned}$$

Das heisst, der Vektor x hat bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ die Koordinaten

$$x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ durch die Koordinaten $(1,-2,2)^\top$ dargestellt. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} v &= 1\cdot b^{(1)} - 2\cdot b^{(2)} + 2\cdot b^{(3)} \\ &= 1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1-2+2\\-1+2+4\\0-4-6\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\5\\-10\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist bereits die Darstellung des Vektors v bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$, da die drei Vektoren $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$ alle bezüglich dieser Standardbasis $\mathcal{E}$ gegeben sind.

7. Sei

$$A := \begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\1&4&3&-1&-4\\2&3&-4&-7&-3\\3&8&1&-7&-8\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Ermitteln Sie eine Basis für den von den Spaltenvektoren erzeugten Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spaltenvektoren in dieser Basis.

Lösung: Wenn wir Zeilen einer Matrix transponieren, werden sie zu Spalten. Deshalb betrachtet man hier am besten die Matrix A^T, weil in der Aufgabenstellung im Teil (b) nach den Spalten gefragt wird und wir für (b) den Teil (a) verwenden möchten. Wir wenden daher das Gauss-Verfahren auf die Matrix A^T an und rechnen

$$\begin{pmatrix}1&1&2&3\\3&4&3&8\\1&3&-4&1\\-2&-1&-7&-7\\-3&-4&-3&-8\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{4.Z+2\times(1.Z)\\5.Z+3\times(1.Z)}]{\substack{2.Z-3\times(1.Z)\\3.Z-1.Z}} \begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&-3&-1\\0&2&-6&-2\\0&1&-3&-1\\0&-1&3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[5.Z+2.Z]{\substack{3.Z-2\times(2.Z)\\4.Z-2.Z}} \begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&-3&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \quad (*)$$

(a) Folglich gilt $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T) = 2$, da $(*)$ zwei Pivotstellen besitzt.

(b) Wir können die Pivot-Zeilen 1 und 2 von A^T als Basis $\mathcal{B}$ des betrachteten Vektorraumes wählen (da Zeilen unter Transposition wieder zu den ursprünglichen Zeilen werden), d. h.

$$\mathcal{B} = \left\{ b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b_1 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = b_2.$$

Aus den obigen Schritten des Gauss-Verfahrens können wir zudem ablesen, dass in der Basis $\mathcal{B}$ gilt, dass

$$\text{Aus } 3.Z - 1.Z - 2 \times (m2.Z) = 0 : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - b_1 - 2(b_2 - 3b_1) = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -5b_1 + 2b_2,$$

$$\text{Aus } 4.Z + 2 \times (1.Z) - m2.Z = 0 : \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} + 2b_1 - (b_2 - 3b_1) = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} = -5b_1 + b_2,$$

$$\text{Aus } 5.Z + 3 \times (1.Z) + m2.Z = 0 : \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + 3b_1 + (b_2 - 3b_1) = 0 \iff \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = -b_2.$$

Hier haben wir verwendet, dass wir im obigen Gauss-Verfahren die zweite Zeile mit $2.Z - 3 \times (1.Z)$ manipuliert haben und deshalb haben: manipulierte $m2.Z = b_2 - 3b_1$.

8. Durch die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \\ p_2(t) &= t^3 + 6t - 5, \\ p_3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \\ p_4(t) &= 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5 \end{aligned}$$

wird ein Vektorraum V erzeugt. Bestimmen Sie $\dim(V)$ und eine Basis von V.

Lösung: Die entsprechende Koeffizientenmatrix A, welche zu den gegebenen vier Polynomen gehört, ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus findet man

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[4.Z-2\times(1.Z)]{\substack{2.Z-1.Z \\ 3.Z-2\times(1.Z)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.Z=\frac{1}{2}\times(2.Z)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4.Z+2.Z]{3.Z-2.Z} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (*).$$

Folglich gilt $\dim(V) = \mathrm{Rang}(A) = 2$ und eine mögliche Basis $\mathcal{B}$ von V ist diejenige, die den nichttrivialen Zeilen der reduzierten Matrix $(*)$ entspricht, das heisst die Polynome, welche den obigen reduzierten Pivotzeilen 1 und 2 von $(*)$ entsprechen, also

$$\mathcal{B} = \{t^3 - 2t^2 + 4t + 1, t^2 + t - 3\}.$$

Eine andere mögliche Basis $\mathcal{B}^*$ von V ist diejenige, die den nichttrivialen Zeilen der ursprünglichen Matrix entspricht, das heisst die Polynome, welche den Pivotzeilen 1 und 2 entsprechen (dies sind $p_1(t)$ und $p_2(t)$), also

$$\mathcal{B}^* = \{t^3 - 2t^2 + 4t + 1, t^3 + 6t - 5\}.$$

9.

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3-6a & -6+5a \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche Werte des Parameters a besitzt die Matrix eine Inverse A^{-1}?

Lösung: Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man Gauss-Schritte ausführt. Wir bringen A also in Zeilenstufenform mit dem Gauss-Verfahren und rechnen dazu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3-6a & -6+5a \end{pmatrix} \overset{\substack{2.Z-2\times(1.Z) \\ 3.Z-3\times(1.Z)}}{\underset{4.Z+1.Z}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & 2-6a & -4+5a \end{pmatrix}$$

$$\overset{3.Z-2.Z}{\underset{4.Z+2\times(2.Z)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6a & 6+5a \end{pmatrix} \overset{4.Z+2a\times(3.Z)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6+a \end{pmatrix}.(*)$$

(a) Die Determinante dieser Dreiecksmatrix $(*)$ ist das Produkt der Diagonalelemente, also $\det(*) = 2\cdot 5\cdot 3\cdot(6+a) = 180+30a$.
Zudem gilt, da das Gauss-Verfahren die Determinante einer Matrix nicht ändert, dass

$$\det(A) = \det(*) = 180+30a.$$

(b) Die Matrix A hat eine Inverse A^{-1} für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$, das heisst für alle reellen Werte $a \neq -6$, denn eine Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\det(A)$ nicht Null ist und es gilt

$$\det(A) = 180+30a = 0 \iff a = -6.$$

10. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem mit dem reellen Parameter α:

$$\begin{array}{rcrcrcr} (2-\alpha)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & -4x_2 & - & (2-\alpha)x_3 & = & -4 \\ & & (3-\alpha)x_2 & + & x_3 & = & 1. \end{array}$$

Für welche α besitzt dieses Gleichungssystem genau eine, unendlich viele, keine Lösung? Zu denjenigen α, für die das Gleichungssystem lösbar ist, bestimme man die Lösungsmenge.

Lösung: Die Determinante der zum obigen Gleichungssystem gehörenden Matrix ist gleich

$$(2-\alpha)\cdot(2-5\alpha+\alpha^2)$$

- man entwickle z.B. nach der ersten Spalte mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz und rechnet

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 2-\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -(2-\alpha) \\ 0 & 3-\alpha & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot(2-\alpha)\cdot\det\begin{pmatrix} -4 & -(2-\alpha) \\ 3-\alpha & 1 \end{pmatrix} + 0 + 0 \\ &= (2-\alpha)\cdot(-4\cdot 1 - (-(2-\alpha))\cdot(3-\alpha)) \\ &= (2-\alpha)\cdot(-4+(2-\alpha)\cdot(3-\alpha)) \\ &= (2-\alpha)\cdot(-4+6-2\alpha-3\alpha+\alpha^2) \\ &= (2-\alpha)\cdot(2-5\alpha+\alpha^2). \end{aligned}$$

Das System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn diese Determinante ungleich Null ist, also

$$\begin{aligned}
&(2-\alpha)\cdot(2-5\alpha+\alpha^2)=0\\
\Longleftrightarrow\ &\alpha=2\ \text{ oder }\ \alpha=\frac{-(-5)-\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{5-\sqrt{25-8}}{2}=\frac{5-\sqrt{17}}{2}\\
&\text{oder }\ \alpha=\frac{-(-5)+\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{5+\sqrt{25-8}}{2}=\frac{5+\sqrt{17}}{2},
\end{aligned}$$

wobei wir die Lösungsformel

$$ax^2+bx+c=0\Longleftrightarrow x=x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ \text{ oder }\ x=x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

für quadratische Gleichungen verwendet haben.
Damit hat das gegebene lineare Gleichungssystem für die Werte

$$\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{2,\frac{5-\sqrt{17}}{2},\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

eine eindeutige Lösung und diese eindeutige Lösung ist gegeben durch

$$x_1=x_2=-\frac{2+\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2},\quad x_3=\frac{8-4\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2}.$$

Um diese Lösung zu berechnen, wendet man den Gauss-Algorithmus auf die zum gegebenen Gleichungssystem gehörende Matrix $\begin{pmatrix}2-\alpha&1&1\\0&-4&-(2-\alpha)\\0&3-\alpha&1\end{pmatrix}$ an und rechnet wie folgt

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2-\alpha&1&1&1\\0&-4&-(2-\alpha)&-4\\0&3-\alpha&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3.Z+\frac{3-\alpha}{4}\times(2.Z)}\left[\begin{array}{ccc|c}2-\alpha&1&1&1\\0&-4&-(2-\alpha)&-4\\0&0&1-\frac{(2-\alpha)(3-\alpha)}{4}&1-(3-\alpha)\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{=}\left[\begin{array}{ccc|c}2-\alpha&1&1&1\\0&-4&-(2-\alpha)&-4\\0&0&\frac{4-(6-5\alpha+\alpha^2)}{4}&-2+\alpha\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{=}\left[\begin{array}{ccc|c}2-\alpha&1&1&1\\0&-4&-(2-\alpha)&-4\\0&0&\frac{-2+5\alpha-\alpha^2}{4}&-2+\alpha\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3.Z=-4\times(3.Z)}\left[\begin{array}{ccc|c}2-\alpha&1&1&1\\0&-4&-(2-\alpha)&-4\\0&0&2-5\alpha+\alpha^2&8-4\alpha\end{array}\right].\ (*)$$

Mit $(*)$ berechnet man nun durch Rückwärtseinsetzten die oben gegebene Lösung

$$
\begin{aligned}
(2-5\alpha+\alpha^2)x_3 = 8-4\alpha \Longleftrightarrow x_3 &= \frac{8-4\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2},\\
-4x_2-(2-\alpha)x_3 = -4 \Longleftrightarrow x_2 &= -\frac{1}{4}\left(-4+(2-\alpha)x_3\right) = \frac{-4+(2-\alpha)\cdot\left(\frac{8-4\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2}\right)}{4}\\
&= \frac{4\cdot(2-5\alpha+\alpha^2)-(2-\alpha)\cdot(8-4\alpha)}{4\cdot(2-5\alpha+\alpha^2)}\\
&= \frac{(2-5\alpha+\alpha^2)-(2-\alpha)\cdot(2-\alpha)}{2-5\alpha+\alpha^2}\\
&= \frac{2-5\alpha+\alpha^2-(4-4\alpha+\alpha^2)}{2-5\alpha+\alpha^2}\\
&= \frac{2-5\alpha+\alpha^2-4+4\alpha-\alpha^2}{2-5\alpha+\alpha^2} = \frac{-2-\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2} = -\frac{2+\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2},\\
(2-\alpha)x_1+x_2+x_3 = 1 \Longleftrightarrow x_1 &= \frac{1}{2-\alpha}(1-x_3-x_2)\\
&= \frac{1-\left(\frac{8-4\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2}\right)-\left(-\frac{2+\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2}\right)}{2-\alpha}\\
&= \frac{(2-5\alpha+\alpha^2)-(8-4\alpha)+(2+\alpha)}{(2-\alpha)\cdot(2-5\alpha+\alpha^2)}\\
&= \frac{2-5\alpha+\alpha^2-8+4\alpha+2+\alpha}{(2-\alpha)\cdot(2-5\alpha+\alpha^2)}\\
&= \frac{-4+\alpha^2}{(2-\alpha)\cdot(2-5\alpha+\alpha^2)}\\
&= \frac{(2-\alpha)\cdot(-2-\alpha)}{(2-\alpha)\cdot(2-5\alpha+\alpha^2)}\\
&= \frac{-2-\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2} = -\frac{2+\alpha}{2-5\alpha+\alpha^2} = x_2.
\end{aligned}
$$

Es bleiben die drei Fälle $\alpha = 2$, $\alpha = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$, $\alpha = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ zu betrachten, in denen die Determinante des Gleichungssystems Null ist, also keine oder unendlich viele Lösungen zu erwarten sind.

(i) Setzt man $\alpha = 2$ ein, so wird das gegebene Gleichungssystem zu

$$
\begin{aligned}
(2-\alpha)x_1+x_2+x_3 &= x_2+x_3 = 1\\
-4x_2-(2-\alpha)x_3 &= -4x_2 = -4 \Longleftrightarrow x_2 = 1\\
(3-\alpha)x_2+x_3 &= x_2+x_3 = 1 \Longrightarrow x_3 = 0
\end{aligned}
$$

und man sieht leicht, dass $x_1 \in \mathbb{R}$ beliebig sein kann, da die Variable x_1 im System gar nicht mehr vorkommt - also unendlich viele Lösungen existieren - und $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ gelten muss.

(ii) Für den Wert $\alpha = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$, existieren keine Lösungen - die zweite und dritte Gleichung werden unverträglich, da gilt

$$\begin{aligned}
-4x_2 - (2-\alpha)x_3 = -4 \iff & -8x_2 - (4-2\alpha)x_3 = -8 \\
& \implies x_2 = \frac{-8 + (4-2\alpha)x_3}{-8} = \frac{-8 + (4-5+\sqrt{17})x_3}{-8} \\
& \quad = \frac{-8 + (-1+\sqrt{17})x_3}{-8}, \\
(3-\alpha)x_2 + x_3 = 1 \implies x_2 &= \frac{1-x_3}{3-\alpha} = \frac{2-2x_3}{6-2\alpha} = \frac{2-2x_3}{6-5+\sqrt{17}} = \frac{2-2x_3}{1+\sqrt{17}} \\
&= \frac{(2-2x_3)\cdot(1-\sqrt{17})}{1-17} = \frac{(2-2x_3)\cdot(1-\sqrt{17})}{-16} \\
&= \frac{(1-x_3)\cdot(1-\sqrt{17})}{-8} = \frac{(1-\sqrt{17}) - (1-\sqrt{17})x_3}{-8} \\
&= \frac{(1-\sqrt{17}) + (-1+\sqrt{17})x_3}{-8} \neq x_2 \text{ vorher} \implies \text{Widerspruch.}
\end{aligned}$$

(iii) Für den Wert $\alpha = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$, existieren ebenfalls keine Lösungen - die zweite und dritte Gleichung werden unverträglich, da gilt

$$\begin{aligned}
-4x_2 - (2-\alpha)x_3 = -4 \iff & -8x_2 - (4-2\alpha)x_3 = -8 \\
& \implies x_2 = \frac{-8 + (4-2\alpha)x_3}{-8} = \frac{-8 + (4-5-\sqrt{17})x_3}{-8} \\
& \quad = \frac{-8 + (-1-\sqrt{17})x_3}{-8}, \\
(3-\alpha)x_2 + x_3 = 1 \implies x_2 &= \frac{1-x_3}{3-\alpha} = \frac{2-2x_3}{6-2\alpha} = \frac{2-2x_3}{6-5-\sqrt{17}} = \frac{2-2x_3}{1-\sqrt{17}} \\
&= \frac{(2-2x_3)\cdot(1+\sqrt{17})}{1-17} = \frac{(2-2x_3)\cdot(1+\sqrt{17})}{-16} \\
&= \frac{(1-x_3)\cdot(1+\sqrt{17})}{-8} = \frac{(1+\sqrt{17}) - (1+\sqrt{17})x_3}{-8} \\
&= \frac{(1+\sqrt{17}) + (-1-\sqrt{17})x_3}{-8} \neq x_2 \text{ vorher} \implies \text{Widerspruch.}
\end{aligned}$$

11. Für welche reellen Werte von s und t hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & sy & + & s^2z & = & 1 \\
s^2x & + & y & + & 2tz & = & 1 \\
sx & + & s^2y & + & z & = & t
\end{array}$$

keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils auch die Lösungsmenge.

Lösung: Die Determinante der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s^2 & 1 & 2t \\ s & s^2 & 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s^2 & 1 & 2t \\ s & s^2 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ s^2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot s \cdot \det \begin{pmatrix} s^2 & 2t \\ s & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot s^2 \cdot \det \begin{pmatrix} s^2 & 1 \\ s & s^2 \end{pmatrix} \\
&= (1 - 2ts^2) - s \cdot (s^2 - 2ts) + s^2 \cdot (s^4 - s) \\
&= 1 - 2ts^2 - s^3 + 2ts^2 + s^6 - s^3 \\
&= 1 - 2s^3 + s^6 \\
&= (1 - s^3) \cdot (1 - s^3) \\
&= (1 - s^3)^2,
\end{aligned}$$

wobei wir nach der ersten Zeile entwickelt haben.
Dieses Polynom $(1-s^3)^2$ hat nur $s = 1$ als reelle Nullstelle, da über $\mathbb{R}$ gilt $s^3 = 1 \Longleftrightarrow s = 1$. Folglich hat das oben gegebene lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung für alle reellen Werte $s \neq 1$ unabhängig davon, welchen Wert die Variable t besitzt. Für $s \neq 1$ und $t \in \mathbb{R}$ beliebig ist die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned}
z &= \frac{t - s}{1 - s^3}, \\
y &= \frac{1 - s^2 - s^3 + 2st + s^4 t - 2t^2}{(1 - s^3)^2}, \\
x &= \frac{1 - s + s^4 - 3s^2 t + 2st^2}{(1 - s^3)^2}.
\end{aligned}$$

Diese Lösungen erhält man aus den im linearen Gleichungssystem gegebenen drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(1)\ x + sy + s^2 z = 1 \\
&(2)\ s^2 x + y + 2tz = 1 \\
&(3)\ sx + s^2 y + z = t
\end{aligned}$$

mit den drei Rechnungen

$$(3) - s \cdot (1) = z - s^3 z = (1 - s^3)z = t - s \Longleftrightarrow z = \frac{t - s}{1 - s^3},$$

$$\text{der Term } s^2x \text{ aus } s^2\cdot(1) \text{ und } (2) \Longrightarrow s^2x = s^2 - s^4z - s^3y = 1 - 2tz - y = s^2x$$
$$\Longleftrightarrow (1-s^3)y = 1 - 2tz - s^2 + s^4z$$
$$\Longleftrightarrow (1-s^3)y = 1 - 2t\cdot\left(\frac{t-s}{1-s^3}\right) - s^2 + s^4\cdot\left(\frac{t-s}{1-s^3}\right)$$
$$\Longleftrightarrow (1-s^3)y = \frac{(1-s^3)-(2t^2-2ts)-(s^2-s^5)+(s^4t-s^5)}{1-s^3}$$
$$\Longleftrightarrow (1-s^3)y = \frac{1-s^3-2t^2+2ts-s^2+s^5+s^4t-s^5}{1-s^3}$$
$$\Longleftrightarrow y = \frac{1-s^2-s^3+2st+s^4t-2t^2}{(1-s^3)^2},$$
$$\begin{aligned}(1) \Longrightarrow x = 1 - sy - s^2z &= 1 - s\cdot\left(\frac{1-s^2-s^3+2st+s^4t-2t^2}{(1-s^3)^2}\right) - s^2\cdot\left(\frac{t-s}{1-s^3}\right)\\
&= \frac{(1-s^3)^2 - s\cdot(1-s^2-s^3+2st+s^4t-2t^2) - s^2\cdot(t-s)\cdot(1-s^3)}{(1-s^3)^2}\\
&= \frac{1-2s^3+s^6-s+s^3+s^4-2s^2t-s^5t+2st^2-(s^2t-s^3)\cdot(1-s^3)}{(1-s^3)^2}\\
&= \frac{1-2s^3+s^6-s+s^3+s^4-2s^2t-s^5t+2st^2-s^2t+s^3+s^5t-s^6}{(1-s^3)^2}\\
&= \frac{1-s+s^4-3s^2t+2st^2}{(1-s^3)^2}.\end{aligned}$$

Falls $s=1$ gilt, so liefern die erste und dritte Gleichung

wenn $s=1$ ist, so ist $(1)=(3) \Longleftrightarrow 1 = x+sy+s^2z = x+y+z = sx+s^2y+z = t \Longrightarrow t=1,$

was bedeutet, dass dann $t=1$ ist, das heisst für $s=1$ und $t\neq 1$ existieren also keine Lösungen.
Die unendlich vielen Lösungen im Fall $s=1$ und $t=1$ erhält man durch

(1.) wähle zum Beispiel $x\in\mathbb{R}$ beliebig,
(2.) dann gilt mit $s=1$ und $t=1$, dass $(1)=(2)$
$\Longrightarrow 1 = x+sy+s^2z = x+y+z = s^2x+y+2tz = 1 \Longrightarrow z = 2z \Longleftrightarrow z=0,$
(3.) Nun gilt (1) mit $s=1 \Longrightarrow x+sy+s^2z = x+y+z = 1 \Longrightarrow y = 1-x-z = 1-x-0 = 1-x$

und sind somit gegeben durch

$$x\in\mathbb{R} \text{ beliebig},\ y = 1-x,\ z = 0,$$

wobei $x\in\mathbb{R}$ ein beliebig wählbarer freier Parameter ist, der die unendliche Lösungsfamilie parametrisiert.

12. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -7x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

Lösung: Es gibt genau eine Lösung, nämlich

$$x_1 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{17}{4}, \quad x_3 = \frac{9}{4}.$$

Diese berechnet man mit dem Gauss-Algorithmus wie folgt

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ -7 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[3.Z+7\times(1.Z)]{2.Z-1.Z} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 8 & 35 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2.Z=\frac{1}{3}\times(2.Z)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 35 \end{array}\right] \xrightarrow{3.Z+4\times(2.Z)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 27 \end{array}\right]. \ (*)$$

Aus $(*)$ folgt, dass $\mathrm{Rang}(*) = 3$ und damit ist die Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems eindeutig bestimmt.
Zudem berechnet man durch Rückwärtseinsetzen in $(*)$, diese eindeutige Lösung zu

$$\begin{aligned} 12x_3 = 27 &\Longleftrightarrow x_3 = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}, \\ -x_2 + x_3 = -2 &\Longleftrightarrow -x_2 = -2 - x_3 \Longleftrightarrow x_2 = 2 + x_3 = 2 + \frac{9}{4} = \frac{8+9}{4} = \frac{17}{4}, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 &\Longleftrightarrow x_1 = 4 - x_3 - x_2 = 4 - \frac{17}{4} - \frac{9}{4} = \frac{16-17-9}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

13. Welche Beziehungen zwischen b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 müssen erfüllt sein, damit das folgende System lösbar ist?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & b_1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & b_3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_4 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & b_5 \end{array}$$

Lösung: Wenn wir drei linear unabhängige Gleichungen im System finden, dann bestimmen diese die Lösung des Systems eindeutig, da wir drei Variablen x_1, x_2, x_3 haben und somit dieses 3×3-Teilsystem eindeutig lösbar ist.

Beispielsweise sind die untersten drei Gleichungen linear unabhängig, da die Determinante der zugehörenden Matrix ungleich Null ist, weil für sie gilt

$$\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = 0 + (-1)^{1+2}\cdot 1 \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{=1-1=0} + (-1)^{1+3}\cdot 2 \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{=0-1=-1} = 2\cdot(-1) = -2 \neq 0$$

und daher bestimmen die drei Parameter b_3, b_4, b_5, welche zu diesen untersten drei Gleichungen gehören, eindeutig eine Lösung und legen somit auch die Werte für b_1 und b_2 fest. Durch Addition der dritten und vierten Gleichung erhält man mittels eines Vergleichs mit der ersten Gleichung

$$\begin{aligned}
&1.\text{ Gleichung} = 3.\text{ Gleichung} + 4.\text{ Gleichung}\\
\iff\ & (b_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3) = (x_2 + 2x_3 = b_3) + (x_1 + x_2 + x_3 = b_4)\\
\iff\ & b_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_3 + b_4\\
\implies & b_1 = b_3 + b_4
\end{aligned}$$

und durch Subtraktion der dritten vom dreifachen der vierten Gleichung erhält man mittels eines Vergleichs mit der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned}
&2.\text{ Gleichung} = 3 \times (4.\text{ Gleichung}) - 3.\text{ Gleichung}\\
\iff\ & (b_2 = 3x_1 + 2x_2 + x_3) = 3 \times (x_1 + x_2 + x_3 = b_4) - (x_2 + 2x_3 = b_3)\\
\iff\ & b_2 = 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3b_4 - b_3\\
\implies & b_2 = 3b_4 - b_3.
\end{aligned}$$

Folglich sind die Beziehungen, damit das System lösbar ist, gegeben durch

$$\begin{aligned}
b_1 &= b_3 + b_4,\\
b_2 &= 3b_4 - b_3,\\
b_3 &= b_3 \in \mathbb{R}\ \text{ beliebig},\\
b_4 &= b_4 \in \mathbb{R}\ \text{ beliebig},\\
b_5 &= b_5 \in \mathbb{R}\ \text{ beliebig}.
\end{aligned}$$

14. Auf einem geschlossenen Metalldraht werden an 4 Punkten die Temperaturen x_1, x_2, x_3, x_4 gemessen. Dabei ist die Temperatur in einem der Punkte jeweils gleich dem arithmetischen Mittel der Temperaturen der beiden benachbarten Punkte.

(a) Stellen Sie ein Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3, x_4 auf.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge davon.

Lösung:

(a) Das arithmetische Mittel zweier Zahlen a und b ist gleich $\frac{a+b}{2}$. Der geschlossene Metalldraht mit den vier Temperaturen x_1, x_2, x_3, x_4 ist schematisch dargestellt zum Beispiel

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \leftrightarrow & x_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ x_4 & \leftrightarrow & x_3 \end{array}$$

und daher sind die Temperaturen gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_2+x_4}{2} \Longleftrightarrow x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 0, \\ x_2 &= \frac{x_1+x_3}{2} \Longleftrightarrow x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ x_3 &= \frac{x_2+x_4}{2} \Longleftrightarrow x_3 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 0, \\ x_4 &= \frac{x_1+x_3}{2} \Longleftrightarrow x_4 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem in Matrixschreibweise lautet somit

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir lösen dieses System mit dem Gauss-Algorithmus. Dazu rechnen wir

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{3.Z=2\times(3.Z)\\ 4.Z=2\times(4.Z)}]{\substack{1.Z=2\times(1.Z)\\ 2.Z=2\times(2.Z)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[4.Z=-(4.Z)]{\substack{2.Z=-(2.Z)\\ 3.Z=-(3.Z)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2.Z\leftrightarrow 3.Z]{1.Z\leftrightarrow 4.Z} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[4.Z-2\times(1.Z)]{3.Z-1.Z} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[4.Z+2.Z]{3.Z+2\times(2.Z)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{4.Z-3.Z} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \quad (*)$$

Durch Rückwärtseinsetzten in $(*)$ berechnet man

Aus der 4. Zeile von $(*)$: wähle $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig,
Aus der 3. Zeile von $(*)$: $-4x_3 + 4x_4 = 0 \Longleftrightarrow -4x_3 = -4x_4 \Longleftrightarrow x_3 = x_4 = \lambda$,
Aus der 2. Zeile von $(*)$: $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \Longleftrightarrow x_2 = 2x_3 - x_4 = 2x_4 - x_4 = x_4 = \lambda$,
Aus der 1. Zeile von $(*)$: $x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 2x_4 - x_3 = 2x_4 - x_4 = x_4 = \lambda$.

Die einzigen Lösungen des Systems sind daher

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \lambda \text{ für } \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig,}$$

die Temperatur ist also konstant.

15. Geben Sie für s und t Bedingungen an, so dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & sx_2 & & & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & sx_3 & = & t \end{array}$$

(a) keine Lösung,

(b) genau eine Lösung,

(c) unendlich viele Lösungen

besitzt. Bestimmen Sie die entsprechenden Lösungsmengen.

Lösung: Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & s \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & s \end{pmatrix}}_{=s-2} + (-1)^{1+2} \cdot s \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix}}_{=0-1=-1} + 0 \\ &= (s-2) + s \\ &= 2s - 2. \end{aligned}$$

Es gilt $2s - 2 = 0 \iff s = 1$. Also haben wir genau eine Lösung, wenn $s \neq 1$ und zwar

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & s & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ t & 2 & s \end{pmatrix}}{2s-2} = \frac{0 + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ t & s \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & s \\ t & 2 \end{pmatrix}}{2s-2} \\ &= \frac{2s - (4 - st)}{2s-2} = \frac{st + 2s - 4}{2s-2}, \\ x_2 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & s \end{pmatrix}}{2s-2} = \frac{0 + 0 + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & t \end{pmatrix}}{2s-2} = -\frac{t-2}{2s-2} = \frac{2-t}{2s-2}, \\ x_3 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & s & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix}}{2s-2} = \frac{0 + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & t \end{pmatrix} + 0}{2s-2} = \frac{t-2}{2s-2} = -x_2, \end{aligned}$$

wobei wir hier zur Berechnung der Lösungen x_1, x_2, x_3 die Cramer'sche Regel aus der Aufgabe 3 der Serie 10 verwendet haben.
Ist nun $s = 1$, so erhält man als Verträglichkeitsbedingung $t = 2$, da mit $s = 1$ gilt

$$\text{1. Gleichung} + \text{2. Gleichung} = \text{3. Gleichung}$$
$$(x_1 + sx_2 = x_1 + x_2 = 2) + (x_2 + x_3 = 0) = (x_1 + 2x_2 + x_3 = x_1 + 2x_2 + sx_3 = t) \Longrightarrow t = 2$$

und in diesem Fall sind die Lösungen

$$\begin{aligned}
&\text{wähle } \; x_1 \in \mathbb{R} \; \text{ beliebig,}\\
&\text{aus der 1. Gleichung}: x_1 + sx_2 = x_1 + x_2 = 2 \Longleftrightarrow x_2 = 2 - x_1,\\
&\text{aus der 2. Gleichung}: x_2 + x_3 = 0 \Longleftrightarrow x_3 = -x_2 = -(2 - x_1) = x_1 - 2,
\end{aligned}$$

oder zusammengefasst

$$\begin{aligned}
&x_1 \in \mathbb{R} \; \text{ beliebig,}\\
&x_2 = 2 - x_1,\\
&x_3 = x_1 - 2.
\end{aligned}$$

Für $s = 1$ und $t \neq 2$ gibt es keine Lösung, da dann die ersten beiden Gleichungen des gegebenen Systems nicht mit der letzten Gleichung vereinbar sind und daher sich ein Widerspruch ergibt.

Daher gilt:

(a) Für $s = 1$ und $t \neq 2$ gibt es keine Lösung.

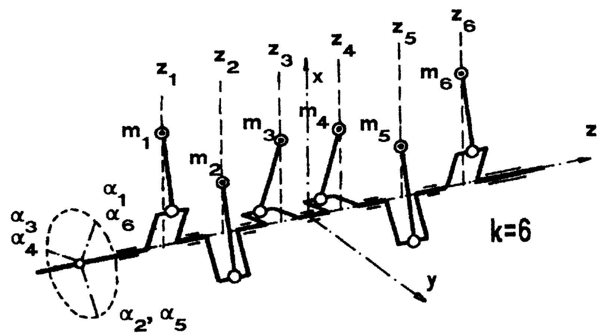
(b) Genau eine Lösung wenn $s \neq 1$.

(c) Unendlich viele Lösungen mit $s = 1$ und $t = 2$.

16. Der sogenannte **Massenausgleich zweiter Ordnung** (Link zu Animationen) einer k-Zylindermaschine liefert für die Impulse (I_1), (I_2) und die Momente (M_1), (M_2) der ersten und zweiten Ordnung folgende Bedingungen:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \sin(\alpha_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i \cos(\alpha_i) = 0 \tag{I_1}$$
$$\sum_{i=1}^{k} m_i \sin(2\alpha_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i \cos(2\alpha_i) = 0 \tag{I_2}$$
$$\sum_{i=1}^{k} m_i z_i \sin(\alpha_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i z_i \cos(\alpha_i) = 0 \tag{M_1}$$
$$\sum_{i=1}^{k} m_i z_i \sin(2\alpha_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i z_i \cos(2\alpha_i) = 0 \tag{M_2}$$

Dabei bezeichnen α_i die Kurbelwinkel und $m_i > 0$ die Massen. Wir nehmen weiter an, dass der Massenschwerpunkt in $z = 0$ liegt, dass $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ und dass $k > 1$.



(a) Wie lautet die Matrix A des homogenen linearen Gleichungssystems, das die Vektoren $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k)^T$ und $\vec{M} = (z_1 m_1, \ldots, z_k m_k)^T$ erfüllen müssen? Warum ist $\vec{M}$ nie ein Vielfaches von $\vec{m}$? Welchen Rang darf A bei Massenausgleich höchstens haben?

(b) Bestimmen Sie A und Rang(A) und lösen Sie $Ax = 0$ für die zwei Fälle:

(i) 4-Zylinder mit Zündfolge 1-3-4-2, $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 180°$.

(ii) 6-Zylinder mit Zündfolge 1-5-3-6-2-4, $\alpha_1 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_5 = 120°$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 240°$.

Ist in beiden Fällen Massenausgleich möglich?

(c) Gibt es für den üblichen Aufbau einer 4-Zylindermaschine

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m, \quad z_1 = -z_4 = 3z_2 = -3z_3$$

Kurbelwinkel α_i, so dass Massenausgleich zweiter Ordnung vorliegt?

Lösung:

(a) Mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) & \ldots & \sin(\alpha_k) \\ \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \ldots & \cos(\alpha_k) \\ \sin(2\alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \ldots & \sin(2\alpha_k) \\ \cos(2\alpha_1) & \cos(2\alpha_2) & \ldots & \cos(2\alpha_k) \end{pmatrix}$$

lauten die beiden Gleichungssysteme

$$A \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) & \ldots & \sin(\alpha_k) \\ \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \ldots & \cos(\alpha_k) \\ \sin(2\alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \ldots & \sin(2\alpha_k) \\ \cos(2\alpha_1) & \cos(2\alpha_2) & \ldots & \cos(2\alpha_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k m_i \sin(\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^k m_i \cos(\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^k m_i \sin(2\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^k m_i \cos(2\alpha_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$A \cdot \vec{M} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_k) \\ \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \dots & \cos(\alpha_k) \\ \sin(2\alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \dots & \sin(2\alpha_k) \\ \cos(2\alpha_1) & \cos(2\alpha_2) & \dots & \cos(2\alpha_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 m_1 \\ z_2 m_2 \\ \vdots \\ z_k m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k m_i z_i \sin(\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^k m_i z_i \cos(\alpha_i) \\ sum_{i=1}^k m_i z_i \sin(2\alpha_i) \\ \sum_{i=1}^k m_i z_i \cos(2\alpha_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

wobei hier 0 der Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$ ist.

Angenommen $\vec{M}$ sei ein Vielfaches von $\vec{m}$, so gilt

$$\lambda \vec{m} = \begin{pmatrix} \lambda m_1 \\ \lambda m_2 \\ \vdots \\ \lambda m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 m_1 \\ z_2 m_2 \\ \vdots \\ z_k m_k \end{pmatrix} = \vec{M}$$

und somit $z_1 = z_2 = \ldots = z_k = \lambda$ (weil alle $m_i \neq 0$ sind) - ein Widerspruch zur in der Aufgabenstellung gemachten Annahme $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$.

Der Rang der Matrix A darf höchstens gleich $k-2$ sein (diese Bedingung ist automatisch erfüllt, sobald $k \geq 6$, da der Rang der $4 \times k$-Matrix A dann höchstens 4 sein kann). Wäre Rang$(A) = k$, so hätte das Gleichungssystem $A\vec{m} = 0$ nur die Lösung $\vec{m} = 0$, was wegen $m_i > 0$ nicht sein kann. Wäre Rang$(A) = k-1$, so gäbe es nur eine linear unabhängige Lösung des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$, daher wären $\vec{m}$ und $\vec{M}$ linear abhängig, weil beide in dieser eindimensionalen Lösungsmenge enthalten sein müssten- aber wir haben gerade oben gezeigt, dass dem nicht so ist.

(b) (i) 4-Zylinder: Mit $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 180°$ ist A in diesem Fall

$$A = \begin{pmatrix} \sin(0) & \sin(\pi) & \sin(\pi) & \sin(0) \\ \cos(0) & \cos(\pi) & \cos(\pi) & \cos(0) \\ \sin(0) & \sin(2\pi) & \sin(2\pi) & \sin(0) \\ \cos(0) & \cos(2\pi) & \cos(2\pi) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

in Zeilenstufenform $(*)$, also z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{2.Z=-(2.Z)}{\xrightarrow{1.Z \leftrightarrow 4.Z}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.Z+1.Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2.Z=\frac{1}{2}\times(2.Z)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.Z-2.Z} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \; (*)$$

In diesem Fall gilt $\operatorname{Rang}(A) = 2$. Es ist wegen $(*)$ daher

$$\begin{aligned}&\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \text{ und } \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ &\Longrightarrow \lambda_4 = -\lambda_1 \text{ und } \lambda_3 = -\lambda_2 \text{ mit } \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}\end{aligned}$$

Die Lösungen für das homogene System $Ax = 0$ oder $A\vec{m} = 0$ sind somit von der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ -\lambda_2 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen der nichterfüllten Bedingung $m_i > 0$ existieren also keine zulässigen Lösungen und somit ist in diesem Fall (i) auch kein Massenausgleich 2. Ordnung möglich.

(ii) 6-Zylinder: Mit $\alpha_1 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_5 = 120°$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 240°$ wird die Matrix A in diesem Fall zu

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \sin(0) & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin(0) \\ \cos(0) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos(0) \\ \sin(0) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \sin(0) \\ \cos(0) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \cos(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und eine mögliche Zeilenstufenform lautet

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3.Z=\frac{2}{\sqrt{3}}(3.Z) \\ 4.Z=2\times(4.Z)}]{\substack{1.Z=\frac{2}{\sqrt{3}}\times(1.Z) \\ 2.Z=2\times(2.Z)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1.Z\leftrightarrow 2.Z} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4.Z-1.Z]{3.Z+2.Z} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1.Z=1.Z+2.Z} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.Z=\frac{1}{2}\times(1.Z)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \ (*)$$

Somit ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$ in diesem Fall. Es ist wegen $(*)$ daher

$$\begin{aligned}\lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6 = 0 \ \text{ und } \ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 = 0\\ \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_6 \ \text{ und } \ \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5\\ \text{und } \ \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_4 \in \mathbb{R}, \lambda_5 \in \mathbb{R}, \lambda_6 \in \mathbb{R} \ \text{ beliebig.}\end{aligned}$$

Die Lösungen des homogenen Systems $Ax = 0$ sind daher gegeben durch

$$\begin{pmatrix}\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_6\\ \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{pmatrix} = \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_5 \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_6 \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

und man erhält einen Massenausgleich z.B. mit $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = m$ für $\vec{m}$ und $\lambda_6 = -mz_1$, $\lambda_5 = -mz_2$, $\lambda_4 = -mz_3$, $\lambda_3 = mz_3$ für $\vec{M}$, das heisst

$$\vec{m} = \begin{pmatrix}m\\m\\m\\m\\m\\m\end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{M} = \begin{pmatrix}mz_1\\mz_2\\mz_3\\-mz_3\\-mz_2\\-mz_1\end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\-z_3\\-z_2\\-z_1\end{pmatrix}.$$

(c) Die Gleichungen (nur vier der acht Gleichungen) lauten

$$\begin{aligned}m\left(\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_4)\right) = 0\\ m\left(\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4)\right) = 0\\ mz_3\left(-3\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + 3\sin(\alpha_4)\right) = 0\\ mz_3\left(-3\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + 3\cos(\alpha_4)\right) = 0,\end{aligned}$$

da für eine 4-Zylindermaschine $1 \leq i \leq 4$ gilt. Ebenfalls haben wir verwendet, dass $z_1 = -z_4 = 3z_2 = -3z_3$ und alle obigen Gleichungen in der Variablen z_3 geschrieben. Wir kürzen die Faktoren vor den Klammern weg, damit wir das lineare Gleichungssystem

$$\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_4) = 0 \tag{1}$$
$$\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4) = 0 \tag{2}$$
$$-3\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + 3\sin(\alpha_4) = 0 \tag{3}$$
$$-3\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + 3\cos(\alpha_4) = 0 \tag{4}$$

erhalten und setzen dann ohne Verlust von Information $\alpha_1 = 0$, da wir eine Zylindermaschine immer so drehen können, dass $\alpha_1 = 0$ gilt.

Eine Addition der Gleichung (1) und der Gleichung (3) mit $\alpha_1 = 0$ und $\sin(0) = 0$ ergibt dann

$$\begin{aligned}
&(\sin(0) + \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_4) = 0) \\
&+(-3\sin(0) - \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + 3\sin(\alpha_4) = 0) \\
\Longleftrightarrow\ &(\sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_4) = 0) \\
&+(-\sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_3) + 3\sin(\alpha_4) = 0) \\
\Longleftrightarrow\ &2\sin(\alpha_3) + 4\sin(\alpha_4) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\sin(\alpha_3) + 2\sin(\alpha_4) = 0
\end{aligned}$$

und dies ist äquivalent zu

$$\sin(\alpha_3) = -2\sin(\alpha_4). \tag{5}$$

Eine Addition der Gleichung (2) und der Gleichung (4) mit $\alpha_1 = 0$ und $\cos(0) = 1$ liefert zusätzlich

$$\begin{aligned}
&(\cos(0) + \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4) = 0) \\
&+(-3\cos(0) - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + 3\cos(\alpha_4) = 0) \\
\Longleftrightarrow\ &(1 + \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4) = 0) \\
&+(-3 - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + 3\cos(\alpha_4) = 0) \\
\Longleftrightarrow\ &-2 + 2\cos(\alpha_3) + 4\cos(\alpha_4) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &-1 + \cos(\alpha_3) + 2\cos(\alpha_4) = 0
\end{aligned}$$

und dies ist äquivalent zu

$$\cos(\alpha_3) = 1 - 2\cos(\alpha_4). \tag{6}$$

Quadrieren und addieren von Gleichung (5) und Gleichung (6) ergibt

$$\begin{aligned}
&1 = \sin^2(\alpha_3) + \cos^2(\alpha_3) \\
&= (-2\sin(\alpha_4))^2 + (1 - 2\cos(\alpha_4))^2 \\
&= 4\sin^2(\alpha_4) + (1 - 4\cos(\alpha_4) + 4\cos^2(\alpha_4)) \\
&= [1 + 4 \cdot \underbrace{(\sin^2(\alpha_4) + \cos^2(\alpha_4))}_{=1}] - 4\cos(\alpha_4) \\
&= 5 - 4\cos(\alpha_4) \\
\Longleftrightarrow\ &4\cos(\alpha_4) = 4 \\
\Longrightarrow\ &\cos(\alpha_4) = 1 \Longrightarrow \alpha_4 = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis $\alpha_4 = 0$ in die Gleichung (6) ein, erhält man

$$\cos(\alpha_3) = 1 - 2\cos(0) = 1 - 2 = -1 \Longrightarrow \alpha_3 = \pi = 180°$$

und mit $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = \pi$, $\alpha_4 = 0$ schliesst man aus der Gleichung (2) schliesslich

$$
\begin{aligned}
&\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4) = 0 \\
\Longleftrightarrow\, &\cos(0) + \cos(\alpha_2) + \cos(\pi) + \cos(0) = 0 \\
\Longleftrightarrow\, &1 + \cos(\alpha_2) - 1 + 1 = 0 \\
\Longleftrightarrow\, &\cos(\alpha_2) = -1 \Longrightarrow \alpha_2 = \pi = 180^\circ.
\end{aligned}
$$

Daher gilt zusammenfassend

$$\alpha_1 = \alpha_4 = 0,\ \alpha_2 = \alpha_3 = 180^\circ$$

und dies ist genau der gleiche Fall wie in **(b) (i)** und dort haben wir bereits gezeigt, dass es in diesem Fall keinen Massenausgleich 2. Ordnung gibt.
Somit gibt es keinen Massenausgleich 2. Ordnung (siehe **(b) (i)**).