1.1. Wahrheitstafel

Füllen Sie die folgende Wahrheitstafel für den Ausdruck

$$(A \to B) \wedge (A \vee C)$$

auf.

A	B	C	$(A \to B) \wedge (A \vee C)$
W	W	W	
W	W	F	
W	F	W	
W	F	F	
F	W	W	
F	W	F	
F	F	W	
F	F	F	

Lösung.

A	B	C	$(A \to B) \wedge (A \vee C)$
W	W	W	W
W	W	F	W
W	F	W	F
W	F	F	F
F	W	W	W
F	W	F	F
F	F	W	W
F	F	F	F

1.2. Induktion

Beweisen Sie per Induktion die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$

(b) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(c) $n < 2^n$

Lösung.

(a) Für $n = 1$, $\sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 2^0 = 1$ und $2^1 - 1 = 1$.
Angenommen, die Aussage ist wahr für $n = N \in \mathbb{N}$, gilt

$$\sum_{i=1}^{N+1} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{N} 2^{i-1} + 2^N = 2^N - 1 + 2^N = 2^{N+1} - 1,$$

da $2^N + 2^N = 2^{N+1}$. Deswegen folgt die Assage aus vollständiger Induktion.

(b) Für $n = 1$ lautet die Aussage $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ und ist wahr. Angenommen, die Aussage ist wahr für $n = N \in \mathbb{N}$, gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{(N+1) \cdot (N+2)} \\
=&\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{(N) \cdot (N+1)} + \frac{1}{(N+1) \cdot (N+2)} \\
=&\frac{N}{N+1} + \frac{1}{(N+1) \cdot (N+2)} = \frac{N \cdot (N+2) + 1}{(N+1) \cdot (N+2)} = \frac{(N+1)^2}{(N+1) \cdot (N+2)} \\
=&\frac{N+1}{N+2}.
\end{aligned}$$

Deswegen folgt die Assage aus vollständiger Induktion.

(c) Für $n = 1$ lautet die Aussage $1 < 2$ und ist wahr. Angenommen, die Aussage ist wahr für $n = N \in \mathbb{N}$, gilt

$$N + 1 < 2^N + 1 \leq 2^N + 2^N = 2^{N+1}$$

da $1 \leq 2^N$. Deswegen folgt die Assage aus vollständiger Induktion.

1.3. Bijektivität

Zeigen Sie, dass die Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad f(x) := \frac{x}{1 + |x|},$$

bijektiv ist.

Lösung.

Wir zeigen zuerst, dass f injektiv ist: Es seien $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = f(x_1)$. Dann folgt:

$$\frac{x_0}{1 + |x_0|} = \frac{x_1}{1 + |x_1|},$$

was wiederum impliziert, dass x_0, x_1 dasselbe Vorzeichen haben müssen. Daher können wir annehmen, dass beide positiv sind, der andere Fall folgt aus der Beobachtung $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit gilt also:

$$\frac{x_0}{1+x_0} = \frac{x_1}{1+x_1} \quad \Rightarrow \quad x_0(1+x_1) = x_1(1+x_0) \quad \Rightarrow \quad x_0 = x_1$$

Also ist f injektiv.

Sei nun $y \in (-1,1)$ gegeben. Wir beschränken uns wiederum auf $y > 0$. da $f(0) = 0$ und da f ungerade ist. Wir müssen für die Surjektivität ein $x > 0$ finden, sodass:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1+x} = y$$

Wir sehen:

$$\begin{aligned} f(x) = y \Leftrightarrow \quad & x = y(1+x) = y + xy \\ \Leftrightarrow \quad & x(1-y) = y \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{y}{1-y} \end{aligned}$$

Da $y < 1$ ist somit die Surjektivität bewiesen.

Alternativ kann man die Inverse $f^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ bestimmen (die Berechnung ist analog zum Beweis der Surjektivität):

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

Dann folgt $\forall y \in (-1,1)$:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= f\left(\frac{y}{1-|y|}\right) \\ &= \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1+\frac{|y|}{1-|y|}} \\ &= \frac{y}{1-|y|+|y|} \\ &= y. \end{aligned}$$

Volllkommen analog lässt sich auch zeigen, dass:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Daher folgt, dass f eine Inverse besitzt und somit bijektiv ist.

1.4. Funktionen

Gegeben seien Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$. Zeigen Sie:

(a) Wenn f und g surjektiv sind, so ist es auch $g \circ f$.

(b) Wenn f und g injektiv sind, so ist es auch $g \circ f$.

(c) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

(d) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

(e) Zeigen Sie, dass folgende Aussage nicht korrekt ist (d.h. finden Sie ein Gegenbeispiel): Wenn g surjektiv ist, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(f) Zeigen Sie, dass folgende Aussage nicht korrekt ist (d.h. finden Sie ein Gegenbeispiel): Wenn f injektiv ist, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

Lösung.

(a) Sei $z \in Z$. Da g surjektiv ist, existiert $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ sodass $f(x) = y$ gilt. Dann gilt aber $(g \circ f)(x) = g(y) = z$ und da $z \in Z$ beliebig war, ist $g \circ f$ surjektiv.

(b) Seien $x_1 \neq x_2 \in X$. Da f injektiv ist, folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$. Da g ebenfalls injektiv ist, folgt $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Insbesondere gilt $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ für alle $x_1 \neq x_2$ in X und somit ist $g \circ f$ injektiv.

(c) Sei $z \in Z$. Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ sodass $(g \circ f)(x) = z$. Insbesondere gilt $g(f(x)) = z$ und folglich ist $f(x) \in Y$ ein Urbild von z unter g. Da z beliebig war, ist g surjektiv.

(d) Wir beweisen die Behauptung indirekt und zeigen: „Wenn f *nicht* injektiv ist, dann ist auch $g \circ f$ *nicht* injektiv." Dies ist formal äquivalent zu der Aussage aus der Aufgabe. Wenn f nicht injektiv ist, dann gibt es $x_1 \neq x_2$ sodass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Dann gilt aber $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$. Also ist $(g \circ f)$ ebenfalls nicht injektiv.

(e) Betrachten Sie folgendes Beispiel: $X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$ und $Z = Y$. Ferner seien g die Identitätsabbildung und $f(1) := 1$. Dadurch sind f, g definiert. Die Abbildung f ist injektiv und g sogar bijektiv. Ferner ist es klar, dass $g \circ f$ nicht surjektiv sein kann, zumal der Definitionsbereich kleiner als der Wertebereich ist.

(f) Es seien $X = Y = \{1, 2\}$ und $Z = \{1\}$, sowie f die Identitätsabbildung und g die konstante Abbildung, d.h. $g(1) = g(2) := 1$. Die Funktion f ist bijektiv, also insbesondere injektiv, und g surjektiv. Man bemerke, dass $g \circ f$ nicht injektiv sein kann, zumal der Wertebereich kleiner als der Definitionsbereich ist.