2.1. Komplexe Zahlen I

Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $|zw| = |z||w|$

(b) $\bar{\bar{z}} = z$.

Lösung. Sei $z = a + ib, w = c + di$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Wir erhalten direkt:

$$|zw|^2 = \overline{zw}zw = \bar{z}\bar{w}zw = \overline{z}z\overline{w}w = |z|^2|w|^2$$

Nimmt man die Wurzel auf beiden Seiten, so folgt wegen der Nicht-Negativität von $|z|$ das gewünschte Resultat.

Alternativ gilt:

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Daher folgern wir per Definition:

$$\begin{aligned} |zw| &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = |z||w| \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z.$$

2.2. Komplexe Zahlen II

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $a + ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$

(a) $(2 + i)(2 - i)$,

(b) $(1 + 3i)^2$,

(c) $\frac{1+i}{1-i}$.

Lösung.

(a) Es gilt

$$(2 + i)(2 - i) = 2^2 - i^2 = 4 + 1 = 5.$$

(b) Hier rechnen wir

$$(1+3i)^2 = 1 + 6i + 9i^2 = -8 + 6i.$$

(c) Um den Bruch zu entfernen, müssen wir mit dem komplex konjugierten des Nenners erweitern.

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{1+i}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i.\end{aligned}$$

2.3. Punktmengen

Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen ohne Computer oder andere technische Hilfsmittel:

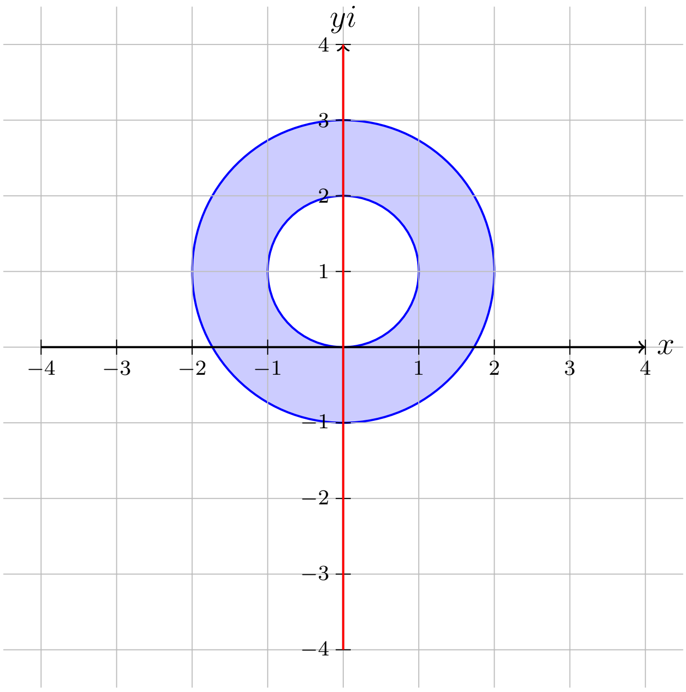
(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-i| < 2\}$

Lösung.

(a) Dies ist die Menge aller komplexer Zahlen mit Realteil gleich 0, d.h. die Imaginäre Achse. Die Lösungsmenge ist im Bild unten rot eingefärbt:

(b) Dies ist der Kreisring um i mit innerem Radius 1 und äusseren Radius 2. Die Lösungsmenge ist im Bild blau eingefärbt:



2.4. Parallelogramm-Gesetz

Benutzen Sie die Eigenschaft $|z|^2 = z\overline{z} = \overline{z}z$ für alle komplexen Zahlen z, um zu zeigen:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Lösung. Es gilt:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= \overline{z+w}(z+w) + \overline{z-w}(z-w) \\ &= \overline{z}z + \overline{z}w + \overline{w}z + \overline{w}w + \overline{z}z - \overline{z}w - \overline{w}z + \overline{w}w \\ &= 2\overline{z}z + 2\overline{w}w \\ &= 2|z|^2 + 2|w|^2, \end{aligned}$$

was das gewünschte Resultat ist.

2.5. Manipulation von Summen und Produkten

Zeigen Sie *ohne* Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0,$$

(b)

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}, \qquad \text{(wobei } a_k \neq 0 \text{ für } k = 0, \dots, n).$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+n},$$

Hinweis: Verwenden Sie die Teilaufgabe (a)

(d)

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Teilaufgabe (b).

Lösung.

(a) Aufgrund der Endlichkeit der Summe dürfen wir die Terme beliebig neu ordnen und kriegen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n - a_0.\end{aligned}$$

(b) Seien

$$f(n) = \prod_{k=1}^{n} a_k, \quad g(n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}}.$$

Dann gilt

$$g(n) = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} a_{k-1}} = \frac{f(n)}{\prod_{j=0}^{n-1} a_j} = \frac{1}{a_0} \frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{a_n}{a_0}.$$

(c) Es gilt

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Unter Verwendung von

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0.$$

folgern wir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(d) Unter Verwendung von b) gilt:

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{n+k+1}{n+k} = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}.$$