3.1. Konvergenz

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-\sqrt{n}^5}{n^2+1} + (-1)^n 10^{27}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{n^2+1} - \frac{n^3-n^2}{n^2+1}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{97}-n^{44}}{n^5-n^2+2^n}$

Lösung.

(a) Es gilt gemäss Beispiel 2.11.5 und Proposition 2.11.6, da der zweite Summand beschränkt ist (wenn auch sehr gross), dass die Folge gegen $+\infty$ konvergiert, da im Zähler ein Polynom vom Grad 3 ist, während im Nenner bloss ein Polynom vom Grad 2 enthalten ist.

(b) Wir sehen:

$$\frac{n^3+n^2}{n^2+1} - \frac{n^3-n^2}{n^2+1} = \frac{2n^2}{n^2+1},$$

und dank der Beispiele aus der Vorlesung folgern wir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{n^2+1} - \frac{n^3-n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2.$$

(c) Wir sehen, dass der Zähler wie n^{97} wächst, der Nenner aber exponentiell mit 2^n. Dank Proposition 2.6.1 folgert sich daher:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{97}-n^{44}}{n^5-n^2+2^n} = 0.$$

3.2. Arithmetisches Mittel

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Beweisen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

Hinweis: *Für $\varepsilon > 0$ sei $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass $|a_n - a| \leq \varepsilon \ \forall n \geq N_\varepsilon$. Dann $\forall n \geq N_\varepsilon$*

$$|s_n - a| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} (a_k - a) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n} (a_k - a) \right|.$$

(b) Geben Sie ein Beispiel einer nicht konvergierenden Folge, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

Lösung.

(a) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n > N(\varepsilon) \ : \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definiere

$$M(\varepsilon) = \max_{1\leq k\leq N(\varepsilon)} |a_k - a|$$

Dann erhalten wir für $n > N(\varepsilon)$:

$$|s_n - a| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}(a_k - a)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n}(a_k - a)\right| \leq \frac{N(\varepsilon)}{n}\cdot M(\varepsilon) + \frac{n-N_\varepsilon}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

Aus dieser Abschätzung folgt sofort

$$\limsup_{n\to\infty} |s_n - a| \leq \left(\lim_{n\to\infty}\frac{N(\varepsilon)M(\varepsilon)}{n}\right) + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n-N(\varepsilon)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Insbesondere gibt es $N'(\varepsilon) > N(\varepsilon)$, sodass

$$|s_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N'(\varepsilon).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, beweist dies die Konvergenz von s_n gegen a.

(b) Betrachte als Beispiel $a_n = (-1)^n$. Dann gilt

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Insbesondere gilt $|s_n| \leq \dfrac{1}{n}$ und folglich konvergiert s_n gegen 0.

3.3. Konvergenz von Reihen

Verwenden Sie das Quotientenkriterium oder das Wurzelkriterium, um die Konvergenz der folgenden Reihen nachzuweisen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^n}$ für alle reellen Zahlen x.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^n} x^n$ für alle reellen Zahlen x mit $|x| < 1$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ für alle reellen Zahlen x.

Lösung.

(a) Wir wenden das Wurzelkriterium an:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n x^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2|x|}{n} = 0,$$

somit folgt gemäss Wurzelkriterium die absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Eine Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}}{\frac{2^n}{1+2^n}} \right| |x| = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^{n+1}}} = |x\breve{a}|$$

Wenn $|x| < 1$, so sehen wir, dass also die Bedingungen des Quotientenkriteriums für n gross genug erfüllt ist und somit die Reihe absolut konvergiert.

(c) Anwenden des Quotientenkriteriums liefert:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \right| |x| = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{2}{n+1} = 0$$

Die Reihe konvergiert also für alle reellen x absolut.