4.1. Gleichmässige Stetigkeit

Sind die folgende Funktionen gleichmässig stetig?

(a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(c) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Lösung.

(a) f ist gleichmässig stetig: sei $\varepsilon > 0$, sei $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{2}$. Dann für jedes $x, y \in (0,1)$ mit $|x-y| \leq \delta_\varepsilon$ gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x(x-y) + y(x-y)| \leq 2|x-y| \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) f ist nicht gleichmässig stetig: wir zeigen, dass für $\varepsilon = 1$ gibt es kein $\delta > 0$, welches die Definition von gleichmässiger Konvergenz erfüllt.
Nehmen wir an zur Widerspruch, dass ein solches $\delta > 0$ existiert. Dann für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| f(x) + f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) \right| \leq 1. \tag{1}$$

Aber

$$\left| f(x) + f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) \right| = \left| x^2 - \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 \right| = \left| 2x\frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4} \right|.$$

Da

$$\lim_{x \to \infty} \left| x\delta + \frac{\delta^2}{4} \right| = \infty$$

erhalten wir ein Widerspruch zu (1).

(c) f ist gleichmässig stetig. Tatsächlich kann die Funktion f zu einer stetigen Funktion $\overline{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ erweitert werden: sei

$$\overline{f} : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Es ist klar, dass $\overline{f} = f$ auf $(0,1)$ und dass $\overline{f}$ als Komposition stetiger Funktionen auf $(0,1]$ stetig ist. Wir überprüfen, dass $\overline{f}$ auch an der Stelle 0 stetig ist: sei $\varepsilon > 0$ und sei $\delta := \varepsilon$. Sei $x \in (0,1]$ mit $|x - 0| < \delta$. Dann gilt

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(0)| = |x \sin(x)| \leq x \leq \varepsilon.$$

Wir schliessen, dass $\overline{f}$ stetig auf $[0,1]$ ist. Da $[0,1]$ kompakt ist, ist $\overline{f}$ gleichmässig stetig. Deswegen ist auch f gleichmässig stetig.

4.2. Gleichmässige Konvergenz 1

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : (0, 0.999) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n.$$

(a) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise?

(b) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig?

Lösung.

(a) Für jedes $x \in (0, 0.999)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

deswegen konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion $f(x) = 0 \ \forall x \in (0, 0.999)$.

(b) Die Folge konvergiert gleichmässig gegen f. Tatsächlich $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in(0,0.999)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,0.999)} x^n = (0.999)^n.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} 0.999^n = 0$$

schliessen wir, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f konvergiert.

4.3. Gleichmässige Konvergenz 2

Wir betrachten die Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x \le n \\ x - n, & \text{if } n < x < n+1 \\ 1, & \text{if } n+1 \le x \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert gegen die Grenzfunktion $f(x) = 0$.

(b) Beweisen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmässig auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

(c) Man betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[-R, R]$ für ein $R > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge gleichmässig auf $[-R, R]$ konvergiert.

Lösung.

(a) Es sei $x \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann gilt für $n \geq x$:

$$f_n(x) = 0,$$

das bedeutet, für n gross genug, ist die Folge $(f_n(x))$ konstant gleich 0. Daher ist der punktweise Grenzwert der Funktionsfolge gerade $f(x) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) Man bemerke, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f_n(n+1) - f(n+1)| = |f_n(n+1)| = 1,$$

daher gilt per Definition, dass die Funktionenfolge nicht gleichmässig auf $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert.

(c) Es sei $R > 0$ gegeben und $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq R$. Dann gilt für alle $n \geq N$ und alle $x \in [-R, R]$:

$$f_n(x) = 0,$$

denn $x \leq R \leq N \leq n$. Somit gilt also, dass die Funktionen f_n konstant gleich 0 sind auf $[-R, R]$ für n gross genug. Daher konvergiert die Funktionenfolge auf $[-R, R]$ trivialerweise gleichmässig gegen $f(x) = 0$.

4.4. Zwischenwertsatz

Sei $f : [-2, -1] \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$ stetig. Nehmen Sie an, dass $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$. Kann man schliessen, dass es $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ existiert, so dass $f(x) = 0$?

Lösung. Nein. Betrachte man die Funktion

$$f : [-2, -1] \cup [1, 2] \to \infty, \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x \in [-2, -1] \\ 1 & \text{falls } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Dann ist f stetig, $f(-2) = -1$ und $f(2) = 1$, aber f nimmt den Wert 0 nicht an.