5.1. Rechenregeln für Ableitungen

Argumentieren Sie, warum die folgenden Funktionen differenzierbar sind und bestimmen Sie ihre Ableitungen:

(a) $\log(\sin(x))$ für $x \in (0, \pi)$,

(b) a^x für $x \in \mathbb{R}$ und ein $a \in (0, \infty)$,

(c) x^x für $x \in (0, \infty)$,

(d) $9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(e) $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$ für $x \in (4, \infty)$,

Lösung.

Differenzierbarkeit lässt sich in jedem Fall mittels der Kettenregel sowie Produkt-/Quotienten- und Summenregel angewandt auf einfache Funktionen wie Polynome, Exponentialfunktion, Logarithmus, etc. bestimmen. Man beachte, dass zu prüfen ist, ob der Nenner bei Quotienten verschwindet, da dies sonst eine Stelle ist, an der Differenzierbarkeit nicht gegeben ist. Zudem muss man sich überzeugen, dass in log keine Zahlen ≤ 0 eingesetzt werden.

(a) Der Ausdruck $\log(\sin x)$ ist für $x \in (0, \pi)$ wohldefiniert, da dann $\sin(x) > 0$ gilt. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$\frac{d}{dx}(\log(\sin(x))) = \frac{1}{\sin(x)} \sin'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(b) Wir schreiben $a^x = e^{x \log(a)}$ und erhalten

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \log(a) e^{x \log(a)} = \log(a) a^x.$$

(c) Es gilt $x^x = e^{x \log x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$\frac{d}{dx}(x^x) = \left[\frac{d}{dx}(x \log x)\right] e^{x \log x} = \left(\frac{x}{x} + \log x\right) e^{x \log x} = (1 + \log x) x^x.$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}) &= 7 \cdot 9x^6 + (-5)3x^{-6} - (-11)3x^{-12} \\ &= 63x^6 - 15x^{-6} + 33x^{-12}. \end{aligned}$$

(e) Wir verwenden zuerst die Kettenregel und dann die Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}} &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}} \cdot \frac{(2x-3)(x^2-7x+12)-(x^2-3x+2)(2x-7)}{(x^2-7x+12)^2} \\
&= \frac{(x^2-7x+12)^{\frac{1}{2}}}{2(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(-4x^2+20x-22)}{(x^2-7x+12)^2} \\
&= \frac{-2x^2+10x-11}{(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}(x^2-7x+12)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

5.2. Potenzen von Betragsfunktionen

Sei $\alpha > -1$. Betrachten Sie die Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\; x \mapsto |x|^{\alpha+1}\,.$$

Bestimmen Sie, für welche α die Ableitung von f_α an der Stelle 0 existiert.

Lösung.

Aus der Definition erhalten wir direkt

$$\frac{f_\alpha(h)-f_\alpha(0)}{h} = \frac{|h|^{\alpha+1}-0}{h} = |h|^\alpha \frac{|h|}{h}\,,$$

d.h.

$$\frac{f_\alpha(h)-f_\alpha(0)}{h} = |h|^\alpha \operatorname{sign} h\,.$$

Deshalb existiert der Limes für h gegen Null genau dann, wenn $\alpha > 0$ ist. In diesem Fall bekommen wir

$$f'_\alpha(0) = \lim_{h\to 0} |h|^\alpha \operatorname{sign} h = 0\,.$$

5.3. Abschätzungen aus Ableitungen

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige und differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ sowie $f'(x) \geq g'(x)$, für alle $x \in]a,b[$.

(a) Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Falls sogar $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in]a, b[$, so zeige man ferner:

$$f(x) > g(x), \quad \forall x \in]a, b]$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$1 - \frac{1}{x} < \log(x) < x - 1, \quad \forall x > 1$$

Lösung.

(a) Wir definieren $h(x) := f(x) - g(x)$ und bemerken, dass $h(a) \geq 0$ sowie:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0, \quad \forall x \in]a, b[$$

Das Monotonie-Kriterium zeigt nun also, dass h monoton wachsend ist, also gilt für alle $x \in [a, b]$:

$$f(x) - g(x) = h(x) \geq h(a) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq g(x)$$

Geht man vor wie zuvor, so finden wir unter den stärkeren Annahmen an die Ableitungen:

$$h'(x) > 0, \quad \forall x \in]a, b[$$

Daher gilt, dass h streng monoton wachsend ist und daher sogar für alle $x \in]a, b]$:

$$f(x) - g(x) = h(x) > h(a) \geq 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$$

(b) Wir sehen:

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}, \log'(x) = \frac{1}{x}, (x-1)' = 1$$

Ist nun $x > 1$ ein, so sehen wir einerseits:

$$1 - \frac{1}{1} = 0 = \log(1) = 1 - 1,$$

sowie andererseits:

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < 1,$$

also haben wir die Ungleichungen für die Ableitungen aus der vorherigen Teilaufgabe. Somit folgt die gewünschte Kette von Abschätzungen.