

### 6.1. Integrale

Man berechne die folgenden Integrale:

(a)  $\int \frac{2^x}{1+4^x} dx,$

(c)  $\int x^3 \arctan x dx,$

(b)  $\int_3^4 \frac{1}{x^2-2x} dx,$

(d)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx,$

### Lösung.

(a) Die Substitution  $t = 2^x$  (mit  $\frac{dt}{dx} = \text{Log}(2)2^x$ ) liefert

$$\begin{aligned} \int \frac{2^x}{1+4^x} dx &= \frac{1}{\text{Log}(2)} \int \frac{1}{1+y^2} dy = -\text{Log}(2) \arctan(y) + C \\ &= -\text{Log}(2) \arctan(2^x) + C \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x} &= \int_3^4 \frac{dx}{x(x-2)} = \int_3^4 \left( \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2}(\text{Log}(4) - \text{Log}(3)) + \frac{1}{2}(\text{Log}(2) - \text{Log}(1)) = \frac{1}{2} \text{Log} \left( \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

(c) Wir erhalten zunächst mit partieller Integration

$$\int x^3 \arctan(x) dx = \frac{1}{4} x^4 \arctan(x) - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{x^2+1} dx.$$

Den letzten Bruch vereinfachen wir mittel Polynomdivision zu

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned} \int x^3 \arctan(x) dx &= \frac{1}{4} x^4 \arctan(x) - \frac{1}{4} \int x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{4} x^4 \arctan(x) - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \arctan(x) + C \end{aligned}$$

(d) Die Substitution  $t = \sin x$  liefert

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx &= \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1 - t^2}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + K = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + K.\end{aligned}$$

## 6.2. Tangenssubstitution

Ziel dieser Aufgabe ist die Einführung einer Substitution, welche eine Vielzahl an Integralen trigonometrischer Funktionen löst. Es sei hier stets  $x \in ]-\pi, \pi[$  und wir schreiben:

$$t = t(x) := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten unter Verwendung der Additionstheoreme:

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

**Hinweis:** Sie dürfen die folgende trigonometrische Identitäten verwenden (Additionstheorem):

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ \sin(x) &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$t'(x) = \frac{1 + t(x)^2}{2}$$

Beachten Sie, dass dies auch zeigt, dass  $t(x)$  eine bijektive, streng monotone Funktion zwischen  $]-\pi, \pi[$  und  $\mathbb{R}$ .

(c) Nutzen Sie die Substitution  $t = \tan(x/2)$  um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

**Lösung.**

(a) Wir berechnen:

$$1 + t(x)^2 = \frac{\cos(x/2)^2 + \sin(x/2)^2}{\cos(x/2)^2} = \frac{1}{\cos(x/2)^2}$$

Dies folgt aus der üblichen Identität  $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ . Ferner sehen wir:

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{\frac{\cos(x/2)^2 - \sin(x/2)^2}{\cos(x/2)^2}}{\frac{1}{\cos(x/2)^2}} = \cos(x/2)^2 - \sin(x/2)^2 = \cos(x),$$

wobei wir im letzten Schritt das Additionstheorem für Kosinus verwenden. Ganz ähnlich findet man:

$$\frac{2t}{1 + t^2} = 2 \cos(x/2)^2 \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = \sin(x),$$

unter Verwendung des Additionstheorems für Sinus.

(b) Direktes Ableiten zeigt:

$$t'(x) = \frac{1}{2} \tan' \left( \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tan \left( \frac{x}{2} \right)^2 \right) = \frac{1 + t^2}{2}$$

Man beachte, dass also  $t'(x) \geq 1/2$  gilt, somit ist  $t(x)$  also streng monoton wachsend und auch injektiv. Die Surjektivität lässt sich aus der Surjektivität des Tangens folgern.

(c) Man sieht leicht nun leicht:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{2t(x)}{1+t(x)^2} + \frac{1-t(x)^2}{1+t(x)^2}} \frac{2}{1+t(x)^2} t'(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2t + 1 - t^2} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2 - (t-1)^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{(t-1)^2}{2}} dt \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{1 - y^2} \sqrt{2} dy \\ &= \sqrt{2} \left( \operatorname{arctanh}(0) - \operatorname{arctanh} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

Hier haben wir  $y = \frac{t-1}{\sqrt{2}}$  verwendet in der zweiten Substitution. Alternativ kann man mittels Partialbruchzerlegung sehen:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{1-y^2} \sqrt{2} dy &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{1-y} dy + \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{1+y} dy \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \log \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \log \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left( \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \log(3+2\sqrt{2})\end{aligned}$$

Beide Lösungen sind korrekt. Man beachte, dass als Stammfunktion zu  $\frac{1}{1-y}$  hier gerade die folgende Funktion gewählt wurde:

$$-\log(1-y)$$

### 6.3. Stammfunktionen

Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen bis auf eine Konstante:

(a)  $\sin(x)^2$

(c)  $\cos(x)e^{\sin(x)}$

(b)  $\sin(x)e^x$

(d)  $\sinh(x)\cos(x)$

*Hinweis:* In einigen Fällen könnte es hilfreich sein, mehrmals partiell zu integrieren.

**Lösung.**

(a) Aus partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int \sin(x)^2 dx &= \int (-\cos(x))' \sin(x) dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) + \int \cos(x) (\sin(x))' dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) + \int \cos(x)^2 dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) + x - \int \sin(x)^2 dx\end{aligned}$$

und somit:

$$2 \int \sin(x)^2 dx = -\cos(x) \sin(x) + x + 2C,$$

daher auch:

$$\int \sin(x)^2 dx = -\frac{1}{2} \cos(x) \sin(x) + \frac{x}{2} + C,$$

wobei  $C \in \mathbb{R}$  beliebig ist.

(b) Aus partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} \int \sin(x)e^x dx &= \int (-\cos(x))' e^x dx \\ &= -\cos(x)e^x + \int \cos(x)e^x dx \\ &= -\cos(x)e^x + \int (\sin(x))' e^x dx \\ &= -\cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx \end{aligned}$$

Löst man dies nun nach der Stammfunktion auf, so sehen wir:

$$\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} e^x + C,$$

wobei  $C \in \mathbb{R}$  beliebig ist.

(c) Gemäss der Kettenregel ist klar, dass  $e^{\sin(x)}$  eine Stammfunktion ist. Daher gilt:

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)} dx = e^{\sin(x)} + C,$$

wobei  $C \in \mathbb{R}$  beliebig ist.

(d) Aus partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} \int \sinh(x) \cos(x) dx &= \cosh(x) \cos(x) + \int \cosh(x) \sin(x) dx \\ &= \cosh(x) \cos(x) + \sinh(x) \sin(x) - \int \sinh(x) \cos(x) dx, \end{aligned}$$

und somit:

$$\int \sinh(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} (\cosh(x) \cos(x) + \sinh(x) \sin(x)) + C,$$

wobei  $C \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante ist.