3.1. Konvergenz

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-\sqrt{n}^5}{n^2+1} + (-1)^n 10^{27}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{n^2+1} - \frac{n^3-n^2}{n^2+1}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{97}-n^{44}}{n^5-n^2+2^n}$

3.2. Arithmetisches Mittel

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Beweisen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

Hinweis: *Für $\varepsilon > 0$ sei $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass $|a_n - a| \leq \varepsilon \ \forall n \geq N_\varepsilon$. Dann $\forall n \geq N_\varepsilon$*

$$|s_n - a| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} (a_k - a) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n} (a_k - a) \right|.$$

(b) Geben Sie ein Beispiel einer nicht konvergierenden Folge, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

3.3. Konvergenz von Reihen

Verwenden Sie das Quotientenkriterium oder das Wurzelkriterium, um die Konvergenz der folgenden Reihen nachzuweisen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^n}$ für alle reellen Zahlen x.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^n} x^n$ für alle reellen Zahlen x mit $|x| < 1$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ für alle reellen Zahlen x.